

Développement : Formule des compléments

ANALYSE & PROBABILITÉS

Référence : [SS] STEIN E., SHAKARCHI R., *Complex analysis*, Princeton University Press - Princeton and Oxford, 2003, p164.

Pour le lemme : même référence, p80.

Pour les leçons :

- 235 : Problèmes d'interversion de symboles en analyse.
- 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.
- 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
- 244 : Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.
- 245 : Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.

On se donne la détermination principale du logarithme $\ln$, et on pose, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, $\alpha^z := e^{z \ln(\alpha)}$.

On note $\{0 < \operatorname{Re}(z) < 1\} := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$.

Soit Γ la fonction Gamma d'EULER définie sur $\{\operatorname{Re}(z) > 0\} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ par :

$$\forall z \in \{\operatorname{Re}(s) > 1\} \quad \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Γ est définie et holomorphe sur cet ensemble (lemme à mettre dans le plan avant le développement).

Le but de ce développement est de montrer la **formule des compléments** : pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$, on a :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Lemme 1.

Pour tout $\alpha \in]0; 1[$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.$$

PREUVE : Soit $\alpha \in]0; 1[$. On pose $I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t)}$.

I_α est l'intégrale d'une fonction mesurable positive, donc elle existe.

Ensuite :

$\rightarrow u : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha(1+t)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$;

$\rightarrow u(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}$ avec $\alpha < 1$, donc $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge (intégrale de RIEMANN). Donc u est intégrable sur $]0; 1]$;

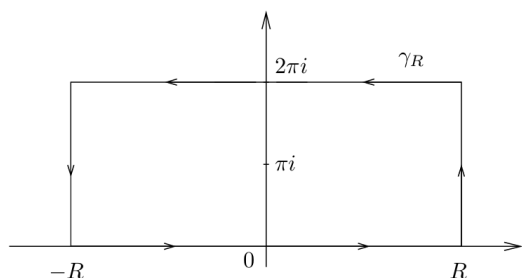
$\rightarrow u(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha+1}}$, avec $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}}$ qui converge (intégrale de RIEMANN, $\alpha+1 > 1$). Donc u est intégrable sur $[1; +\infty[$.

Ainsi, u est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, et donc $I_\alpha < +\infty$.

La fonction $u : t \mapsto \ln(t)$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, avec $u' : t \mapsto \frac{1}{t}$. D'après le théorème de changement de variable, on a convergence de l'intégrale suivante et :

$$I_\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{e^{u(\alpha-1)}(1+e^u)}.$$

Soit $f : z \mapsto \frac{1}{e^{z(\alpha-1)}(1+e^z)}$, dont les pôles (qui sont simples) sont les $z \in \mathbb{C}$ tels que $e^z = -1$, i.e. $z = ik\pi$ pour k impair. On se donne $R > 1$. Considérons le lacet γ_R suivant :



Le théorème des résidus fournit :

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 2i\pi \operatorname{Res}_f(i\pi), \quad (1)$$

où $\operatorname{Res}_f(i\pi) = \frac{e^{-i\pi(\alpha-1)}}{e^{i\pi}} = e^{-i\pi\alpha}$ (car le pôle $i\pi$ de f est simple)

(on peut aussi calculer la limite de $(z - i\pi)f(z)$ en reconnaissant l'inverse d'un taux d'accroissement, avec $1 = -e^{i\pi}$).

Mais on a aussi :

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(t) dt + \int_0^{2\pi} f(R + it) i dt + \int_R^{-R} f(t + 2i\pi) dt + \int_{2\pi}^0 f(-R + it) i dt$$

$$:= I_1(R) + I_2(R) + I_3(R) + I_4(R),$$

en notant $I_1(R)$, $I_2(R)$, $I_3(R)$ et $I_4(R)$ les quatre intégrales à droite de l'égalité, dans l'ordre.

On a :

$$\begin{aligned} |I_2(R)| &\leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{e^{(R+it)(\alpha-1)}(1+e^{R+it})} \right| dt \\ &\leq e^{-R(\alpha-1)} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{|1+e^R e^{it}|} \\ &\leq e^{-R(\alpha-1)} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{||1|-|e^R||} \\ &\leq 2\pi \frac{e^{-R\alpha+R}}{e^R-1}, \end{aligned}$$

puisque $R > 1$.

Maintenant, $\frac{e^{-R(\alpha-1)}}{e^R-1} \underset{R \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-R\alpha} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$, puisque $\alpha > 0$. Donc $I_2(R) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$.

De même, $|I_4(R)| \leq 2\pi \frac{e^{R(\alpha-1)}}{e^{-R}-1} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$, puisque $\alpha < 1$. Enfin,

$$\begin{aligned} I_3(R) &= - \int_{-R}^R \frac{dt}{e^{(t+2i\pi)(\alpha-1)}(1+e^{t+2i\pi})} \\ &= -e^{2i\pi(1-\alpha)} \int_{-R}^R \frac{dt}{e^{t(\alpha-1)}(1+e^t)} \\ &= -e^{-2i\pi\alpha} I_1(R). \end{aligned}$$

Par conséquent, en repartant de (1), $I_1(R)(1 - e^{-2i\pi\alpha}) + I_2(R) + I_4(R) = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}$, et en faisant tendre R vers $+\infty$ (sachant que $e^{-2i\pi\alpha} \neq 1$, puisque $\alpha \in]0; 1[$) :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} &= 2i\pi \frac{e^{-i\pi\alpha}}{1 - e^{-2i\pi\alpha}} \\ &= 2i\pi \frac{1}{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}} \\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}, \end{aligned}$$

grâce à une formule d'EULER. Cela achève la preuve. $\square$

Théorème 2. Formule des compléments.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$, on a :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

PREUVE : Montrons la formule pour $z \in]0; 1[$ (on conclura par principe des zéros isolés). Soit $\alpha \in]0; 1[$.

On fixe $u > 0$. On a $\Gamma(1-\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{-\alpha} e^{-t} dt$.

La fonction $v : t \mapsto \frac{t}{u}$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, avec $v' : t \mapsto \frac{1}{u}$. D'après le théorème de changement de variable, on a convergence de l'intégrale qui suit et :

$$\Gamma(1-\alpha) = \int_0^{+\infty} u^{-\alpha} v^{-\alpha} e^{-uv} u dv = u^{1-\alpha} \int_0^{+\infty} v^{-\alpha} e^{-uv} dv.$$

Ensuite, on applique le théorème de FUBINI-TONELLI (fonctions positives) pour écrire :

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) &= \int_0^{+\infty} \Gamma(1-\alpha) u^{\alpha-1} e^{-u} du \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} u^{1-\alpha} v^{-\alpha} e^{-uv} u^{\alpha-1} e^{-u} dv du \\ &= \int_0^{+\infty} v^{-\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-u(v+1)} du dv \\ &= \int_0^{+\infty} v^{-\alpha} \left[-\frac{e^{-u(v+1)}}{v+1} \right]_{u=0}^{u=+\infty} dv \\ &= \int_0^{+\infty} v^{-\alpha} \times \frac{1}{v+1} dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} \frac{dv}{v^\alpha(1+v)} \\
&= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)},
\end{aligned}$$

d'après le lemme précédent.

Enfin, $z \mapsto \Gamma(z)\Gamma(1-z) - \frac{1}{\sin(\pi z)}$ est holomorphe sur l'ouvert connexe $\{0 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$ par somme de fonctions holomorphes, et s'annule sur $]0; 1[$. D'après le principe des zéros isolés, cette fonction est nulle sur $\{0 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$, ce qui achève la preuve. $\square$