

Développement : Théorème de BERNSTEIN pour les séries entières

ANALYSE & PROBABILITÉS

Référence : [GX] GOURDON X., *Les maths en tête, Analyse*, Ellipses, 2008, p250.

Pour les leçons :

- 218 : Formules de TAYLOR. Exemples et applications.
- 228 : Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.
- 241 : Suites et séries de fonctions, exemples et contre-exemples.
- 243 : Séries entières, propriétés de la somme.

On rappelle la proposition suivante :

Proposition 1. Formule de TAYLOR avec reste intégral à l'ordre $n \in \mathbb{N}$.

Si $f : [a; b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a; b]$, alors on a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{F^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Cette formule est trouvable dans [GX], page 75.

Théorème 2. Théorème de BERNSTEIN pour les séries entières.

Soient $a > 0$ et $f :]-a; a[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Si, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]-a; a[$, on a $f^{(2k)}(x) \geq 0$, alors f est développable en série entière sur $] -a; a[$ en 0.

PREUVE : Soit $b \in]0; a[$. Soit $F : x \mapsto f(x) + f(-x)$, définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -a; a[$ par somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

F est paire. Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $F^{(2k+1)}(0) = 0$.

Soient $x \in]0; b[$ et $n \in \mathbb{N}$. En appliquant la formule de TAYLOR avec reste intégral à l'ordre $2n+1$ à la fonction F sur $[0; x]$, on obtient :

$$F(x) = \sum_{k=0}^n \frac{F^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + R_n(x),$$

$$\text{où } R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} F^{(2n+2)}(t) dt.$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $F^{(2k)}(0) = 2f^{(2k)}(0) \geq 0$. Donc, pour $x = b$:

$$F(b) \geq R_n(b) \geq 0.$$

Ensuite, si $x \neq b$, la fonction $t \mapsto \frac{x-t}{b-t}$ est décroissante sur $[0, x]$. Cela permet d'écrire :

$$\begin{aligned} 0 \leq R_n(x) &= \int_0^x \left(\frac{x-t}{b-t} \right)^{2n+1} \frac{(b-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} F^{(2n+2)}(t) dt \\ &\leq \left(\frac{x}{b} \right)^{2n+1} \int_0^x \frac{(b-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} F^{(2n+2)}(t) dt \\ &\leq \left(\frac{x}{b} \right)^{2n+1} R_n(b) \\ &\leq \left(\frac{x}{b} \right)^{2n+1} F(b). \end{aligned}$$

Comme $0 \leq \frac{x}{b} < 1$, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$. Donc :

$$\forall x \in [0; b[\quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F^{(2n)}(0)}{(2n)!} x^{2n}.$$

F étant paire, cette égalité est valable sur $] -b; b[$.

Soit $x \in]-b; b[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, en appliquant une nouvelle fois la formule de TAYLOR avec reste intégral à f sur $[0; x]$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x),$$

$$\text{avec } r_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{(2n+2)}(t) dt.$$

Pour $t \in [0; x] \subset]-a; a[$, par positivité de $f^{(2n+2)}(t)$, on a :

$$\begin{aligned} 0 \leq f^{(2n+2)}(t) &\leq f^{(2n+2)}(t) + f^{(2n+2)}(-t) \\ &\leq F^{(2n+2)}(t). \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} 0 \leq r_n(x) &\leq R_n(x) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

En notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$, on a donc montré que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1}(x) = f(x).$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} S_{2n}(x) - S_{2n-1}(x) &= \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} x^{2n} \\ &= \frac{F^{(2n)}(0)}{2(2n)!} x^{2n} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

car $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{F^{(2n)}(0)}{(2n)!} x^{2n}$ est convergente.

Comme $(S_{2n-1}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$, on en déduit que $(S_{2n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers $f(x)$.

Les suites $(S_{2n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent donc vers $f(x)$. On en déduit que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge simplement vers f sur $] -b; b[$, pour tout $b \in] -a; a[$. C'est donc le cas sur $] -a; a[$, ce qui achève la preuve. $\square$

Application 3. Existence du développement en série entière de la fonction tangente en zéro.

$\tan$ est développable en série entière sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ en 0.

PREUVE : La fonction $f := \tan' = 1 + \tan^2$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. D'après la formule de LEIBNIZ, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f^{(n)} = (\tan^2)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-k)}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : "Pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}[$, $\tan^{(n)}(x) \geq 0$ ". Démontrons-la par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Si $n = 0$, $\tan$ est bien positive sur $[0; \frac{\pi}{2}[$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie pour tout $k \in [0; n]$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

On a, grâce au travail précédent, avec $n+1 > 0$:

$$\tan^{(n+1)} = (\tan')^{(n)} = (1 + \tan^2)^{(n)} = (\tan^2)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-k)},$$

et d'après $\mathcal{P}(k)$ et $\mathcal{P}(n-k)$ pour $k \in [0; n]$ (puisque $n-k \in [0; n]$), chaque terme de la somme définit une fonction positive sur $[0; \frac{\pi}{2}[$, et donc $\tan^{(n+1)} \geq 0$ sur $[0; \frac{\pi}{2}[$. Cela prouve $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ est positive sur $[0; \frac{\pi}{2}[$.

Comme $\tan$ est impaire, les $\tan^{(2k+1)} = f^{(2k)}$ ($k \in \mathbb{N}$) sont des fonctions paires sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, donc positives sur ces intervalles.

D'après le théorème de BERNSTEIN pour les séries entières, la fonction $\tan'$ est développable en série entière sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ en 0.

Par conséquent, $\tan$ est développable en série entière sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ en 0. $\square$