

Développement : Développement en produit eulérien du sinus

ANALYSE & PROBABILITÉS

Référence : GOURDON X., *Les maths en tête, Analyse*, 2^{ème} édition, ellipses, 2008, p262.

Pour les leçons :

- 235 : Problèmes d'intervention de symboles en analyse.
- 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
- 244 : Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.
- 246 : Séries de FOURIER. Exemples et applications.

Le but de ce développement est de montrer que, pour tout $t \in]-\pi; \pi[$, on a :

$$\sin(t) = t \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{t^2}{k^2 \pi^2}\right).$$

Lemme 1. Un calcul d'une série de FOURIER.

Pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on a :

$$\cotan(t) = \frac{1}{t} + 2t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - n^2 \pi^2}.$$

PREUVE : Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Soit $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in]-\pi; \pi[\quad f_\alpha(t) = \cos(\alpha t),$$

et telle que f_α est 2π -périodique sur $\mathbb{R}$. Remarquons tout d'abord que f_α est continue sur $\mathbb{R}$. Calculons sa série de FOURIER.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a, par parité de $t \mapsto \cos(\alpha t) \cos(nt)$:

$$\begin{aligned} a_n(f_\alpha) &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha t) \cos(nt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\alpha t) \cos(nt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos(\alpha + n)t + \cos((\alpha - n)t)) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin((\alpha + n)t)}{\alpha + n} + \frac{\sin((\alpha - n)t)}{\alpha - n} \right]_0^{\pi}, \end{aligned}$$

puisque $\alpha + n \neq 0$ et $\alpha - n \neq 0$ (car $\alpha \notin \mathbb{Z}$). Donc :

$$\begin{aligned} a_n(f_\alpha) &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin((\alpha + n)\pi)}{\alpha + n} + \frac{\sin((\alpha - n)\pi)}{\alpha - n} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{(-1)^n \sin(\alpha\pi)}{\alpha + n} + \frac{(-1)^n \sin(\alpha\pi)}{\alpha - n} \right) \\ &= \frac{(-1)^n \sin(\alpha\pi)}{\pi} \left(\frac{\alpha - n + \alpha + n}{\alpha^2 - n^2} \right) \\ &= (-1)^n \frac{2\alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2 - n^2)}. \end{aligned}$$

Comme f_α est impaire, ses autres coefficients de FOURIER sont nuls.

Sa série de FOURIER est donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \cos(nt).$$

Maintenant, f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. D'après le théorème de DIRICHLET, et comme f_α est continue sur $\mathbb{R}$, la série de FOURIER de f_α converge simplement vers f_α sur $\mathbb{R}$. Donc :

$$\forall t \in [-\pi; \pi] \quad \cos(\alpha t) = \frac{\sin(\alpha t)}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \cos(nt).$$

Pour $t = \pi$, et en divisant par $\sin(\alpha\pi) \neq 0$ (car $\alpha \notin \mathbb{Z}$) :

$$\cotan(\alpha\pi) = \frac{1}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2 - n^2)}.$$

Cela est vrai pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (ce qui est équivalent à $\alpha\pi \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$). Donc, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on a :

$$\cotan(t) = \frac{1}{t} + 2t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - n^2\pi^2}.$$

□

Théorème 2. Développement en produit eulérien du sinus.

Pour tout $t \in]-\pi; \pi[$, on a :

$$\sin(t) = t \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{t^2}{k^2\pi^2}\right).$$

PREUVE : Soit $x \in]0; \pi[$. Soit $f : [0; x] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in [0; x] \quad f(t) = \begin{cases} \cotan(t) - \frac{1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

D'après le lemme :

$$\forall t \in [0; x] \quad f(t) = 2t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - n^2\pi^2}.$$

La série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}$ converge normalement sur $[0; x]$. En effet, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0; x]$, on a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2} \right| &= \frac{2t}{n^2\pi^2 - t^2} \\ &\leq \frac{2x}{n^2\pi^2 - x^2}, \end{aligned}$$

avec, puisque $x \neq 0$:

$$\frac{2x}{n^2\pi^2 - x^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2x}{\pi^2} \times \frac{1}{n^2}.$$

Or, $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ est une série de RIEMANN convergente ($2 > 1$). Donc $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}$ converge normalement (donc uniformément) sur $[0; x]$.

Cela permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t) dt &= \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2} dt \\ &= \int_0^x \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2} dt \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \int_0^x \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2} dt \quad (\text{somme finie}) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{-2t}{-t^2 + n^2\pi^2} dt, \end{aligned}$$

avec $n^2\pi^2 - t^2 > 0$, pour tout $t \in [0; x]$. Donc :

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t) dt &= \sum_{n=1}^{+\infty} [\ln(n^2\pi^2 - t^2)]_0^x \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2\pi^2 - x^2}{n^2\pi^2}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right). \end{aligned}$$

Maintenant, pour $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{n=1}^N \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = \ln\left(\prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\right).$$

Donc :

$$e^{\sum_{n=1}^N \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right)} = \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right).$$

Comme $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right)$ converge, on en déduit que le produit à droite de l'égalité a une limite quand $N \rightarrow +\infty$,

qu'on va noter $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right)$. En outre, $e^{\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right)} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right)$.

Enfin, en notant $g : t \mapsto \ln \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)$, dérivable sur $]0; x]$ (car $\sin$ est positive sur $]0; x] \subset [0; \pi]$), on a, pour $t \in]0; x]$:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\frac{\cos(t)t + \sin(t)}{t^2}}{\frac{\sin(t)}{t}} \\ &= \frac{\cos(t)t + \sin(t)}{t^2} \times \frac{t}{\sin(t)} \\ &= \frac{\cos(t)t + \sin(t)}{t \sin(t)} \\ &= \frac{\cos(t)}{\sin(t)} + \frac{1}{t} \\ &= \cotan(t) + \frac{1}{t} \\ &= f(t). \end{aligned}$$

g est donc une primitive de f sur $]0; x]$, et $\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = \ln(1) = 0$ (car $\frac{\sin(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$, taux d'accroissement du sinus en 0).

Par conséquent :

$$\int_0^x f(t) dt = \ln \left(\frac{\sin(x)}{x} \right).$$

En définitive,

$$\ln \left(\frac{\sin(x)}{x} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right).$$

Par composition avec exp et d'après le travail précédent :

$$\frac{\sin(x)}{x} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right),$$

et donc :

$$\sin(x) = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right),$$

pour tout $x \in]0; \pi[$. Par imparité des membres de l'égalité, elle est également valable pour $x \in]-\pi; 0[$. Et pour $x = 0$, les deux membres valent 0.

D'où le résultat. $\square$