Définition. *Soit E un ensemble dénombrable. Soit μ et ν deux mesures de proba sur $(E, \mathcal{P}(E))$. La distance de variation totale entre μ et ν est $||\mu - \nu|| = \sum_{y \in E} |\mu(y) - \nu(y)|$*

Proposition. $||\mu - \nu|| = 2sup_{A \subset E} |\mu(A) - \nu(A)|$

Démonstration. *Soit $A \subset (E)$. On a alors*

$$\begin{aligned}\sum_{y \in E} |\mu(y) - \nu(y)| &\geq |\mu(A) - \nu(A)| + |\mu(A^C) - \nu(A^c)| \\ &\geq |\mu(A) - \nu(A)| + |1 - \mu(A) - (1 - \nu(A))| \\ &\geq 2|\mu(A) - \nu(A)| \\ &\geq 2sup_{A \subset E} |\mu(A) - \nu(A)|\end{aligned}$$

Soit $A = \{y \in E | \ \mu(y) \geq \nu(y)\}$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{y \in E} |\mu(y) - \nu(y)| &= \mu(A) - \nu(A) + \nu(A^C) - \mu(A^c) \\ &= 2(\mu(A) - \nu(A)) \\ &= 2|\mu(A) - \nu(A)|\end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{y \in E} |\mu(y) - \nu(y)| = 2sup_{A \subset E} |\mu(A) - \nu(A)|$$

théorème. *Soient $(X_{n,m})_{n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq m \leq n}$ des V.A. indépendentes à valeurs dans $\{0, 1\}$ de lois $\mu_{n,m}$. On note $p_{n,m} = \mathbb{P}(X_{n,m}) = 1$ ($X_{n,m} \sim \mathcal{B}(p_{n,m})$). On suppose $\sum_{m=1}^n p_{n,m} \underset{n \to \infty}{\to} \lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $max_{1 \leq m \leq n} p_{n,m} \underset{n \to \infty}{\to} 0$.*

Notons $S_n = \sum_{m=1}^n X_{n,m}$. Alors S_n converge vers une loi de poisson de paramètre λ. De plus en notant μ_n la loi de S_n et ν_n la loi de poisson de pramètre $\sum_{m=1}^n p_{n,m}$ on a

$$||\mu_n - \nu_n|| \leq 2 \sum_{m=1}^n p_{n,m}^2$$

Lemme. *Soient $\mu_1, \ \mu_2, \ \nu_1, \ \nu_2$ des mesures de probas sur $\mathbb{N}$. notons $\mu_1 \times \mu_2, \ \nu_1 \times \nu_2$ leur mesure produit. Alos*

$$||\mu_1 \times \mu_2 - \nu_1 \times \nu_2|| \leq |\mu_1 - \nu_1|| + ||\mu_2 - \nu_2||$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}||\mu_1 \times \mu_2 - \nu_1 \times \nu_2|| &= \sum_{(x,y) \in \mathbb{N}^2} |\mu_1(x)\mu_2(y) - \nu_1(x)\nu_2(y)| \\ &= \sum_{(x,y) \in \mathbb{N}^2} |\mu_1(x)\mu_2(y) - \nu_1(x)\nu_2(y) + \nu_1(x)\mu_2(y) - \nu_1(x)\mu_2(y)| \\ &\leq \sum_{(x,y) \in \mathbb{N}^2} |\mu_1(x)\mu_2(y) - \nu_1(x)\mu_2(y)| + \sum_{(x,y) \in \mathbb{N}^2} |\nu_1(x)\mu_2(y) - \nu_1(x)\nu_2(y)| \\ &\leq \sum_{(x,y) \in \mathbb{N}^2} \mu_2(y)|\mu_1(x) - \nu_1(x)| + \sum_{(x,y) \in \mathbb{N}^2} \nu_1(x)|\mu_2(y) - \nu_2(y)| \\ &\leq \sum_{x \in E} |\mu_1(x) - \nu_1(x)| + \sum_{y \in E} |\mu_2(y) - \nu_2(y)| \\ &\leq ||\mu_1 - \nu_1|| + ||\mu_2 - \nu_2||\end{aligned}$$

Lemme. $||\mu_1 * \mu_2 - \nu_1 * \nu_2|| \leq ||\mu_1 \times \mu_2 - \nu_1 \times \nu_2||$

Démonstration. *Avec le changement de variable* $z = x - y,\ y = y$

$$
\begin{aligned}
||\mu_1 * \mu_2 - \nu_1 * \nu_2|| &= \sum_{x\in\mathbb{N}} \left| \sum_{y\in\mathbb{N}} \mu_1(x-y)\mu_2(y) - \sum_{y\in\mathbb{N}} \nu_1(x-y)\nu_2(y) \right| \\
&\leq \sum_{(x,y)\in\mathbb{N}^2} |\mu_1(x-y)\mu_2(y) - \nu_1(x-y)\nu_2(y)| \\
&\leq ||\mu_1 \times \mu_2 - \nu_1 \times \nu_2||
\end{aligned}
$$

Lemme. *Si* $\mu \sim \mathcal{B}(p)$ *et* $\nu \sim \mathcal{P}(p)$ *alors* $||\mu - \nu|| \leq 2p^2$

Démonstration. *comme exp st convexe, pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *on a* $e^{-x} \geq 1 - x$

$$
\begin{aligned}
||\mu - \nu|| &= |\mu(0) - \nu(0)| + |\mu(1) - \nu(1)| + \sum_{n=2}^{\infty} \nu(n) \\
&= |1 - p - e^{-p}| + |p - pe^{-p}| + 1 - e^{-p} - pe^{-p} \\
&= e^{-p} + p - 1 + p - pe^{-p} + 1 - e^{-p} - pe^{-p} \\
&= 2p(1 - e^{-p}) \leq 2p^2
\end{aligned}
$$

théorème. *La convergence en variation totale est équivlente à la convergence en loi.*

Démonstration. *Si* $||\mu_n - \mu|| \to 0$ *alors* $\forall k \in E$, $|\mu_n(k) - \mu(k)| \to 0$ *donc* $\mu_n \to \mu$ *en loi.*
Si $\mu_n \to \mu$ *en loi. Soit* $\varepsilon > 0$, $\mu(E) = \sum_{k\in E} \mu(k) = 1$ *donc il existe une partie finie* $A \subset E$ *tel que* $\mu(A) \geq 1 - \varepsilon$. *Soit* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geq N,\ k \in A$, $|\mu_n(k) - \mu(k)| \leq \frac{\varepsilon}{card(A)}$ *et donc* $|\mu_n(A) - \mu(A)| \leq \varepsilon$ $\forall n \geq N$

$$
\begin{aligned}
||\mu_n - \mu|| &\leq \sum_{k\in A} |\mu_n(k) - \mu(k)| + \sum_{k\in A^C} \mu_n(k) + \sum_{k\in A^C} \mu(k) \\
&\leq \sum_{k\in A} |\mu_n(k) - \mu(k)| + 1 - \sum_{k\in A} \mu_n(k) + \sum_{k\in A^C} \mu(k) \\
&\leq \sum_{k\in A} |\mu_n(k) - \mu(k)| + 1 - \sum_{k\in A} \mu_n(k) + \sum_{k\in A} \mu(k) - \sum_{k\in A} \mu(k) + \sum_{k\in A^C} \mu(k) \\
&\leq 2\sum_{k\in A} |\mu_n(k) - \mu(k)| + 2\mu(A^C) \\
&\leq 4\varepsilon
\end{aligned}
$$

donc $||\mu_n - \mu|| \to 0$

Démonstration. *Notons* $\nu_{n,m}$ *la loi de poisson de paramètre* $p_{n,m}$ *et* ν *la loi de poisson de paramètre* λ. *Comme les* $X_{n,m}$ *sont indépendant on a* $\mu_n = \mu_{n,1} * ... * \mu_{n,n}$ *par définition de* S_n.

Si $Y_1 \sim \mathcal{P}(p_{n,1}), ..., Y_n \sim \mathcal{P}(p_{n,n})$ *alors* $Y_1 + ... + Y_n \sim \mathcal{P}(\sum_{m=1}^{n} p_{n,m})$ *Donc* $\nu_n = \nu_{n,1} * ... * \nu_{n,n}$

Par les lemmes et une récurrence immédiate,

$$
||\mu_n - \nu_n|| \leq \sum_{m=1}^{n} ||\mu_{n,m} - \nu_{n,m}|| \leq 2\sum_{m=1}^{n} p_{n,m}^2
$$

Donc

$$
sup_{A\subset\mathbb{N}} |\mu_n(A) - \nu_n(A)| \leq \sum_{m=1}^{n} p_{n,m}^2 \leq max_{1\leq m\leq n} p_{n,m} \sum_{m=1}^{n} p_{n,m} \underset{n\to\infty}{\to} 0
$$

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|\mu_n(k) - \nu_n(k)| \to 0$ *or pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *on a* $|\nu_n(k) - \nu(k)| \to 0$ *donc pour tout* $k \in \mathbb{N}$, $|\mu_n(k) - \nu(k)| \to 0$. S_n *converge bien en loi vers une loi de poisson de paramètre* λ