théorème. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de polynome caractéristique scindé, de valeurs propre $\lambda_1, ..., \lambda_r$. Alors il existe des entiers $d_{j,1}, ..., d_{j,l_j}$ pour $j \in \{i, ..., \}$ tel que dans une certaine bse β de E, $Mat_\beta(f)$ soit diagonale par bloc avec les blocs*

$$(B_{j,k})_{\substack{1 \leq j \leq r \\ 1 \leq k \leq l_j}}$$

où $B_{j,k} = \lambda_j I_{d_j,k} + J_{d_j,k}$ en notan J_d la matrice de Jordan

$$J_d = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_d(\mathbb{K})$$

Lemme. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice q alors pour tout $x \in E$ tel que $f^{q-1}(x) \neq 0$, l'espace $E_{f,x} = Vect(x, f(x), ..., f^{q-1}(x))$ est $f-stable$ de dimension q*

Démonstration. *Par nilpotence de f, $E_{f,x} = \mathbb{K}[f](x)$ c'est donc un sous-espace $f-$stable. Soient $\lambda_0, ..., \lambda_{q-1}$ tel que $\sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k f^k(x) = 0$. Alors*

$$0 = f^{q-1}(\sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k f^k(x)) = \lambda_0 f^{q-1}(x)$$

Comme $f^{q-1}(x) \neq 0$ on a $lambda_0 = 0$. Supposons que il existe $i \in \{0, ..., q-2\}$ tel que $\lambda_0 = ... = \lambda_i$. Alors

$$0 = f^{q-2-i}(\sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k f^k(x)) = f^{q-2-i}(\sum_{k=i+1}^{q-1} \lambda_k f^k(x)) = \lambda_{i+1} f^{q-1}(x)$$

Et encore une fois comme $f^{q-1} \neq 0$, $\lambda_{i+1} = 0$. On voit ainsi par recurrence que $\lambda_0 = ... = \lambda_{q-1} = 0$ et donc $E_{f,x}$ est de dimension q

Lemme. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Il existe $d_1 \geq ... \geq d_l$ des entiers tels que dans une certaine base β de E, $Mat_\beta(f)$ soit diagonale par blocs avec blocs $(J_{d_k})_{1 \leq k \leq l}$*

Démonstration. *Par récurrence forte sur $dim(E) = n$. Si $n = 1$ le seul endomorphisme nilpotent est 0 et le réultat est immédiat. Supposons le résultat vrai pour tout endomorphisme nilpotent d'un espace de dimension inférieur ou égal à n. On suppose $dim(E) = n+1$. soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice q, $2 \leq q \leq n-1$. En effet si $q = 1$, $f = 0$ et le résultat est immédiat, si $q = n$ alors $E_{f,x} = E$ et dans la base $\{x, f(x), ..., f^{n-1}(x)\}$ la matrice de f est J_n.*

Soit $x \in E$ tel que $f^{q-1} \neq 0$. On note $(e_1, ..., e_q) = (x, f(x), ..., f^{q-1}(x))$ que l'on complete en une base $(e_1, ..., e_q, e_{q+1}, ..., e_n)$ de E.

On pose $F = \{y \in E | \ \forall j \in \mathbb{N}, e_q^* \circ f^j(y) = 0\} = \cap_{j<q} ker(e_q^* \circ f^j)$. Comme pour tout $j < q$ $dim(ker(e_q^* \circ f^j)) = n-1$, F est de dimension au moins égale à $n-q$ et F est clairement $f-stable$. Voyons que $F \cap E_{f,x} = \{0\}$.

Soit $y = \sum_{i=0}^{q-1} \lambda_i f^i(x) \in F \cap E_{f,x}$. alors $0 = e_q^*(y) = \lambda_{q-1}$, $0 = e_q^*(f(y)) = \lambda_{q-2}$ et ainsi de suite jusqu'a $0 = e_q(f^{q-1}(y)) = \lambda_0$ donc $y = 0$. Ainsi $dim(F) \leq n-q$ et donc $dim(F) = n-q$.

On a ainsi $E = E_{f,x} \oplus F$. La matrice de $f_{|E_{f,x}}$ dans la base $\{x, f(x), ..., f^{q-1}(x)\}$ est J_q. En appliquant l'hypothèse de récurrence à $f_{|F}$ on obtient une base de F tel que la matrice de $f_{|F}$ soit de la forme voulue. On obtient le résultat en concaténant les bases.

Démonstration. *En notant $\chi_f(X) = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ on a par le théorèmede Cayley Hamilton et le lemme des Noyaux $E \bigoplus_{k=0}^r ker(f - \lambda_k)^{\alpha_k}$. On note $N_k = ker(f - \lambda_k)^{\alpha_k}$. On applique le lemme précédent à la famille de morphisme $(f_{|N_k} - \lambda_k Id_{N_k})$ et on obtient la décomposition souhaité en concaténant les bases trouvées.*

NB :

— la taille du plus grand bloc de jordan de la vp λ est la multiplicité de λ dans le polynome minimale.

— le nombre de bloc associé a la vp λ est la dimension de E_λ

— La somme des tailles de blocs associé àà λ est la multiplicité de λ dans le polynome cractéristique.