théorème. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphism normal, Il existe une b.o.n. β de E tel que dans cette base*

$$Mat_\beta(u) = \begin{pmatrix} D_p & & & \\ & R_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_r \end{pmatrix}$$

Où D_p est diagonale de taille p, $p + 2r = n$, et pour $k \in \{1, ..., r\}$

$$R_k = \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix},\ b_k \neq 0$$

Lemme. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, Il existe un sous-espace de E stable par u de dimension 1 ou 2*

Démonstration. *Si u admet une valeur propre réelle λ alors soir e_1 un vecteur propre associ, $\mathbb{R}e_1$ est stable par u de dimension 1. Si u n'admet pas de valeur propre, on considère $(X^2 + bX + c)$ un facteur irréductible de degré 2 de μ_u. $\mu_u(X = (X^2 + bX + c)Q(x)$. Par minimalité de μ_u comme $deg(Q) < deg(\mu_u)$ $Q(u) \neq 0$. Comme $(u^2 + bu + cId_E) \circ Q(u) = 0$ alors necessaire $(u^2 + bu + cId_E)$ n'est pas injectif. Ainsi Soit $x \in ker(u^2 + bu + cId_E) \setminus \{0\}$ et posons $P = Vect(x, u(x))$. Pour tout $\alpha x + \beta u(x) \in P$, $u(\alpha x + \beta u(x)) = -\beta cx + (\alpha - \beta b)u(x) \in P$ donc P est stable par u de dimension 2.*

Lemme. *si F est $u-stable$ alors $F^\perp$ est $u-stable$*

Démonstration. *Si $F = \{0\}$ ou $F = E$, il n'y a rien a faire. Sinon dans une b.o.n. adapté à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$ on a que la matrice de u est $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$. La relation $A^TA = AA^T$ donne $A_1A_1^T + A_2A_2^T = A_1^TA_1$, en passant à la trace on a $Tr(A_2A_2^T) = 0$ or l'application $M \to Tr(MM^T)$ est un produit scalaire donc $A_2 = 0$, $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$ et $F^\perp$ est stable par u*

Lemme. *Il existe des sous espaces $P_1, ..., P_r$ stables par u de dimension 1 ou 2 tels que $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} P_i$*

Démonstration. *Par recurrence sur $dim(E) = n$, si $n = 1$ ou $n = 2$ c'est immédiat. On suppose $n \geq 3$ et le résultat vrai pour tout endomorphisme normal d'un espace euclidien de dimension infieur à n. D'après le premier lemme il existe un espace P_1 stable par u de dimension 1 ou 2. D'après le deuxième lemme $P_1^\perp$ est stable par u et de dimension $< n$ donc par hypothèse de recurrence applique à l'ndomorphisme normal induit par u sur $p_1^\perp$, on déduit le résultat.*

Démonstration. *par récurence sur $dim(E) = n$. Si $n = 1$, rien à faire. si $n = 2$ on distingue 2 cas.*

— *si u a une valeu propre réelle λ. Soit e_1 un vecteur propre normé. Alors si $u \neq \lambda Id_E$, $\mathbb{R}e_1 = E_\lambda$ et donc $(\mathbb{R}e_1)^\perp$ est une droite vectorielle engendrée par un vecteur normé e_2 et $(\mathbb{R}e_1)^\perp$ est stable par u par le lemme 2, donc $(\mathbb{R}e_1)^\perp$ est un espace propre de u. Ainsi dans la b.o.n. (e_1, e_2), la matrice de u est diagonale.*

— *Si u n'a pas de valeur propre réelle. Alors soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sa matrice dans une base orthonormée. Comme u et normal, on a la elation $M^TM - MM^T = 0$ d'ou le systeme*

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = a^2 + b^2 \\ ab + cd = ac + bd \end{cases}$$

Si $b = c$, M est symmétrique donc M admet une valeur propre réelle, ce qui n'est aps le cas. Donc $b = -c$ et $b \neq 0$ (sinon M serait diagonale et aurait encore des valeur propre réelle). et donc $d = a$, $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $b \neq 0$

On suppose $n \geq 3$ et le résultat vrai pour tout endomorphisme normal d'un espace euclidien de dimension inférieur à n. ON distingue à nouveau deux cas

— *Si u admet une valeur propre réelle* λ*, alors* $E_\lambda^\perp$ *est stable par u donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à* $u_{|E_\lambda^\perp}$. *et on obtient le résultat en concaténant une b.o.n. de* $E_\lambda^\perp$ *avec la base obtenue.*

— *si u n'a pas de valeur propre réelle. D'après le troisiemme lemme il existe* $P_1, ..., P_r$ *de dimension 1 ou 2 (a fortiori 2) stable par u tels que* $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} P_i$. *D'après le cas* $n = 2$ *pour tout* $i \in \{1, ..., r\}$ *il exite* B_i *une b.o.n. de* P_i *tel que l'endomorphisme induit par u sur* P_i *soit de la forme* $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ *Dans la base* $B = \cup_{1 \leq i \leq} B_i$ *on a la forme souhaitée.*