théorème. *pour tout* $X \in M_n(\mathbb{R})$

$$D(exp)(X) = e^X \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ad_X)^k}{(k+1)!}$$

Démonstration. *Soient* $H \in M_n(\mathbb{R})$ *et* $L \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}))$ *On s'interesse aux equations differentielles*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f'(t) & = & L(f(t)) \\ f(0) & = & H \end{array} \right. \tag{1}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} g'(t) & = & e^{tL}(H) \\ g(0) & = & 0 \end{array} \right. \tag{2}$$

Soit f *une solution de* (1), *alors* $(e^{-tL}(f(t)))' = e^{-tL}(f'(t)) - e^{-tL} \circ L(f(t)) = 0$ *donc* $t \to e^{-tL}(f(t))$ *est constante égale à sa valeur en 0. évalué en 0 on trouve* $e^0(f(0)) = H$ *et donc* $f(t) = e^{tL}(H)$. *Clairement,* $t \to e^{tL}(H)$ *est solution de* (1) *c'est donc l'unique solution.*

En intégrant terme à terme la série exponentielle, on obtient $g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}L^k}{(k+1)!}(H)$, $g(0) = 0$ *donc cette fonction est solution de* (2). *Par Cauchy-Lipshitz (l'equation est de la forme* $g'(t) = f(t)$, *c'est l'unique solution du système.*

Soit $X \in M_n\mathbb{R})$ *Considrons* $f : t \to e^{tX}He^{-tX}$, *Llors* $f'(t) = Xf(t) - f(t)X = ad_X(f(t))$. f *est donc solution de* (1) *avec* $L = ad_X$ *donc* $f(t) = e^{tad_X}(H)$. *En particulier avec* $t = 1$, $e^X H^{-X} = e^{ad_X}(H)$

On définit $g : t \to \partial_{u=0}(e^{-tX}e^{t(X+uH)})$. *alors* $g(0) = \partial_{u=0}(I_n) = 0$
$(t,u) \to e^{-tX}e^{t(X+uH)} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, M_n(\mathbb{R}))$ *car* $exp \in \mathcal{C}^2$ *donc par le théorème de Schwarz :*

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \partial_t \partial_{u=0}(e^{-tX}e^{t(X+uH)}) \\
&= \partial_{u=0}\partial_t(e^{-tX}e^{t(X+uH)}) \\
&= \partial_{u=0}(-e^{-tX}Xe^{t(X+uH)} + e^{-tX}(X+uH)e^{t(X+uH)}) \\
&= \partial_{u=0}(ue^{-tX}He^{t(X+uH)}) \\
&= e^{-tX}He^{tX}
\end{aligned}$$

Ainsi par ce qui précède, $g'(t) = e^{-tad_X}H$ *et donc* g *est solution de* 2 *avec* $L = -ad_X$. *Donc pour* $t = 1$, $\partial_{u=0}(e^{-X}e^{X+uH}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ad_X)^k}{(k+1)!}(H)$. *En notant* $h : u \to X + uH$, $e^{X+uH} = exp \circ h(u)$

$$\begin{aligned}
\partial_u(e^{X+uH}) &= D(exp)(h(u))d_u(h) = D(exp)(X+uH)(H) \\
\partial_{u=0}(e^{-X}e^{X+uH}) &= e^{-X}D(exp)(X)(H) \\
D(exp(X)(H) &= e^X \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ad_X)^k}{(k+1)!}(H)
\end{aligned}$$