théorème. *Soit* (X,d) *un espace métrique compact et* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* X *telle que* $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x_{n+1}) = 0$*. Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de* (x_n) *est un connexe de* X

Démonstration. *On note* Γ *l'ensemble de valeurs d'adhérence de* (x_n)*. c'est un compact de* X *car fermé. Supposons* Γ *pas connexe. Alor il existe* A *et* B *deux fermés non-vides disjoints tels que* $\Gamma = A \sqcup B$*. Comme* A *et* B *sont fermés dans un compact, elles sont compactes. On en déduit* $d(A,B) > 0$*, on pose* $\alpha = d(A,B)$*. on définit* $A' := \{x \in X | \ d(x,A) < \frac{\alpha}{3}\}$*,* $B' := \{x \in X | \ d(x,B) < \frac{\alpha}{3}\}$ *et* $K = X \setminus A' \cup B'$*. Comme* A' *et* B' *sont ouverts dans* Γ*, donc* K *est fermé dans un compact donc compact.*

Par définition de la suite (x_n) *il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geq N$*,* $d(x_{n+1},x_n) < \frac{\alpha}{3}$*. Comme les parties* A *et* B *sont non vides il exite* $a \in A$ *et* $b \in B$ *qui sont des valeur d'adhérence de* (X_n) *donc il existe* $n_0 > N$ *tel que* $d(a,x_{n_0}) < \frac{\alpha}{3}$ *et* $x_{n_0} \in A'$*. de même il existe* $n_2 > n_0$ *tel que* $d(b,x_{n_2}) < \frac{\alpha}{3}$ *et* $x_{n_2} \in B'$

$x_{n_2} \notin A'$ *car sinon on aurait qu'il xiste* $a' \in A$ *tel que* $d(x_{n_2},a') < \frac{\alpha}{3}$ *et par inégalité triangulaire* $d(a',b) \leq d(a',x_{n_2}) + d(x_{n_2},b) < \frac{2\alpha}{3}$ *ce qui est impossible par définition de* α*. Il existe donc* $n_2 > n_1 > n_0$ *tel que* $x_{n_1} \notin A'$ *et* $x_{n_1-1} \in A'$*.* $x_{n_1} \notin B'$ *en effet sinon on aurait qu'il existe* $b' \in B$*,* $a' \in A$ *tel que* $d(a',x_{n_1-1}) < \frac{\alpha}{3}$ *et* $d(b',x_{n_1}) < \frac{\alpha}{3}$ *et par inégalité triangulaire* $d(a',b) \leq d(a',x_{n_1-1}) + d(x_{n_1-1},x_{n_1}) + d(x_{n_1},b') < \alpha$ *ce qui est impossible par définition de* α*. Ainsi* $x_{n_1} \notin B'$ *donc* $x_{n_1} \in K$*. On construit ainsi par récurrence une sous suite de* (x_n) *contenue dans* K *qui est compact et donc qui admet une valeur d'adhérence, ce qui contredit la définition de* K*.* Γ *est forcément connexe.*

théorème. *Soit* $f : [0,1] \to [0,1]$ *continue et* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite definie par* $x_0 \in [0,1]$*,* $x_{n+1} = f(x_n)$ *vérifiant* $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} - x_n = 0$*, alors* x_n *converge.*

Démonstration. *On note* Γ *l'ensemble des valeurs d'adhérence de* (x_n)*. Par le théorème précédent,* Γ *est connexe, c'est donc un intervalle fermé. Voyons* $\Gamma \subset Fix(f) = \{a \in [0,1] | \ f(a) = a$*. Soit* $a \in \Gamma$*. Il existe une sous-suite* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *qui converge vers* a*. Or* $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) - x_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k+1} - x_{n_k} = 0$ *et par continuité de* f*,* $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(a)$ *donc* $f(a) = a$

Si Γ *est reduit à un point, alors* (x_n) *est bornée et n'admet qu'une valeur d'adhérence donc converge. Si* Γ *n'est pas réduit à un point alors il existe* $c \in \Gamma$*,* $h > 0$ *tels que* $[c-h,c+h] \subset \Gamma$*. On a qu'il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $|x_N - c| < \frac{h}{2}$ *donc* $x_N \in \Gamma$*. Ainsi pour tout* $n > N$*,* $x_n = f(x_{n-1}) = x_N$ *et la suite est stationnaire. et* Γ *est donc en fait réduit à un point.* (x_n) *converge.*