VM

22/12/14

Bicommutant

Cadre : E K-ev de dimension finie. $u \in \mathcal{L}(E)$.

$E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$, où $F_i = K[u]\cdot x_i$; $P_i = \mu_{u,x_i}$.

$P_r \mid P_{r-1} \mid \dots \mid P_1$

$n_i = \deg P_i$ $\quad \mathcal{B}_i = (x_i, u(x_i), \dots, u^{n_i-1}(x_i))$ base de F_i.

Lemme : $\varphi : C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) : u \circ v = v \circ u\} \to \prod_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} P_i(u)$

$v \mapsto (v(x_i))_{i \in \{1,\dots,r\}}$

est bien définie et est un isomorphisme de K-ev.

Théorème : • $C(C(u)) = K[u]$

(• $C(u) = K[u]$ ssi u est cyclique, i.e $r = 1$).

dém du lemme.

• Soit $i \in \{1,\dots,r\}$. Alors $P_i(u)(v(x_i)) = v \circ P_i(u)(x_i) = 0$.
car $v \in C(u)$

Donc φ est bien définie

• φ est linéaire.

• φ est injective : soit $v \in \operatorname{Ker}\varphi$. Alors $\forall i \in \{1,\dots,r\}$, $v(x_i) = 0$.

Soit $1 \leq i \leq r$, $0 \leq j \leq n_i - 1$. Alors $v(u^j(x_i)) = u^j \circ v(x_i) = 0$

Donc v s'annule sur une base de E : $v = 0$.

• φ est surjective : soit $(y_i)_{1 \leq i \leq r} \in \prod_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} P_i(u)$.

On définit v par $v(u^j(x_i)) := u^j(y_i)$ $\forall\, 1 \leq i \leq r$, $0 \leq j \leq n_i - 1$.

• Montrons que $v \in C(u)$: Soit $i \in \{1,\dots,r\}$.

• Soit $0 \leq j \leq n_i - 2$: $v \circ u(u^j(x_i)) = v \circ u^{j+1}(x_i) = u^{j+1}(y_i)$

$u \circ v(u^j(x_i)) = u \circ u^j(y_i) = u^{j+1}(y_i)$

• Soit $j = n_i - 1$: Il existe $Q_i \in K[X]$, de degré $\leq n_i - 1$

tel que $P_i = X^{n_i} - Q_i$

$x_i, y_i \in \operatorname{Ker} P_i(u)$ donc $u^{n_i}(x_i) = Q_i(u)(x_i)$

$$u^{n_i}(y_i) = Q_i(u)(y_i)$$

Ainsi, $u \circ v\,(u^{n_i-1}(x_i)) = u \circ u^{n_i-1}(y_i) = u^{n_i}(y_i)$

$$v \circ u\,(u^{n_i-1}(x_i)) = v \circ u^{n_i}(x_i) = v \circ Q_i(u)(x_i)$$

$$= Q_i(u)(y_i)$$

car $Q_i(u)$ est CL de $id, u, \dots, u^{n_i-1}$ $\quad = u^{n_i}(y_i)$

Donc $u \circ v$ et $v \circ u$ coïncident sur une base de E : $v \in C(u)$.

Ceci prouve le lemme.

$\square$

dém du théorème :

- $K[u] \subset C(C(u))$: clair.
- Soit $w \in C(C(u))$.

Soit π la projection sur F_1 parallèlement à $\bigoplus_{i \geq 2} F_i$.

Alors $\pi \circ u\,(u^j(x_i)) = \pi \circ u^{j+1}(x_i) = \begin{cases} u^{j+1}(x_1) & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \geq 2 \end{cases}$

$$= u \circ \pi\,(u^j(x_i))$$

donc $\pi \circ u = u \circ \pi$: $\pi \in C(u)$.

Ainsi, $w(x_1) = w(\pi(x_1)) = \pi(w(x_1))$, ce qui prouve que $w(x_1) \in \operatorname{Im} \pi = F_1$, et qu'il existe $R \in K[X]$ tel que $w(x_1) = R(u)(x_1)$.

Soit $i \geq 2$. Comme $P_i \mid P_1$, $x_i \in \operatorname{Ker} P_i(u) \subset \operatorname{Ker} P_1(u)$.

Donc $(x_i, x_2, \dots, x_r) \in \prod_{j=1} \operatorname{Ker} P_j(u)$, donc il existe $v_i \in C(u)$ tel que $v_i(x_1) = x_i$.

$$(w - R(u))(u^j(x_i)) = \underbrace{(w - R(u))}_{\in C(C(u))}\,\underbrace{(u^j \circ v_i)}_{\in C(u)}(x_1) = u^j \circ v_i \circ \underbrace{(w - R(u))(x_1)}_{=0} = 0.$$

Donc $w = R(u)$: $C(C(u)) = K[u]$.

- $K[u] \subset C(u)$: clair.
- $\dim K[u] = \deg \mu_u$. $\dim C(u) \geq \sum_{i=1}^{r} \deg P_i$. $P_1 = \mu_u$.

$K[u] = C(u)$ ssi $\dim K[u] = \dim C(u)$ ssi $r = 1$ ssi u cyclique.