théorème. *$exp : M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.*

Démonstration. *Soit $C \in M_n(\mathbb{C})$, alor $\mathbb{C}[C]$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$ donc fermé. Ainsi $exp(C) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{C^k}{k!} \in \mathbb{C}[C]$. Ainsi $exp(\mathbb{C}[C]) \subset \mathbb{C}[C]$.*

Voyons que $\mathbb{C}[C]^\times = \mathbb{C}[C] \cap GL_n(\mathbb{C})$. Limplication $\mathbb{C}[C]^\times \subset \mathbb{C}[C] \cap GL_n(\mathbb{C})$ est claire. Soit $M \in \mathbb{C}[C] \cap GL_n(\mathbb{C})$. Par Cayley-Hamilton, $\chi_M(M) = 0$. En notant $\chi_M = a_0 + ... + a_n X^n$, On a $a_0 \neq 0$ car $M \in GL_n(\mathbb{C})$ donc 0 n'est pas valeur propre de M. On peut ainsi noter

$$M \sum_{k=1}^{n} \frac{a_n}{a_0} M^{k-1} = I_n$$

donc M^-1 est un polynome en M qui est un polynome en C donc $M \in \mathbb{C}[C]^\times$. ce qui donne l'égalité énoncée.

Comme deux polynome en C commutent on a pour tout $M, N \in \mathbb{C}[C]$, $exp(M+N) = exp(M)exp(N)$ donc $exp : \mathbb{C}[C] \to \mathbb{C}[C]^\times$ réalise un morphisme de groupe.

$\mathbb{C}[C]^\times$ est un ouvert de $\mathbb{C}[C]$ car c'est l'intersection de $\mathbb{C}[C]$ avec l'ouvert $det^{-1}(\mathbb{C}^*)$. Voyons qu'il est connexe par arc. Soient $M, N \in \mathbb{C}[C]^\times$. Pour tout $z \in [0,1]$, $zM + (1-z)N \in \mathbb{C}[C]$. On considère la fonction polynomiale $P : z \to det(zM + (1-z)N)$. P est non nul car $P(0) = det(N) \neq 0$ donc P admet un nombre fini de racine dans $\mathbb{C}$. On peut donc contruire une fonction $z : t \to z(t)$ continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ qui évite ces points telle que $z(0) = 0$ et $z(1) = 1$. Le chemin $\gamma(t) = z(t)M + (1 - z(t))N$ réalise la connexité.

Voyons que $exp(\mathbb{C}[C]$ est ouvert et fermé dans $\mathbb{C}[C]^\times$ (toutes les fonctions et ensembles considérés sont dans $\mathbb{C}[C]$). On connait $d_0 exp = Id_{M_n(\mathbb{C})}$ donc $det(d_0 exp) \neq 0$. par le théorème d'inversion locale, il existe U un voisinnage de 0, V un voisinnage de I_n tel que $exp : U \to V$ soit un difféomorphisme. $exp(\mathbb{C}[C])$ contient un voisinnage de I_n. Soit $A \in \mathbb{C}[C]$, $exp(A+U) = exp(A)expU) = exp(A)V$. Comme $exp(A)$ est inversible, $f : M \to A^{-1}M$ est un difféomophisme donc $exp(A)V = f^-1(V)$ est un ouvert. Comme $I_n \in V$, $exp(A) \in exp(A)V = exp(A+U)$. Donc $exp(\mathbb{C}[C])$ est un ouvert.

Comme $exp(\mathbb{C}[C])$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}[C]^\times$ on peut écrire

$$\mathbb{C}[C]^\times \setminus exp(\mathbb{C}[C]) = \bigcup_{M \in \mathbb{C}[C]^\times \setminus exp(\mathbb{C}[C])} M exp(\mathbb{C}[C])$$

qui est une réunion d'ouvert donc ouvert. Ainsi $exp(\mathbb{C}[C])$ est fermé.

Par connexité de $\mathbb{C}[C]^\times$, $exp(\mathbb{C}[C]) = \mathbb{C}[C]^\times$. Ainsi pour $C \in M_n(\mathbb{C})$, $C \in \mathbb{C}[C]^\times = exp(\mathbb{C}[C]) \subset exp(M_n(\mathbb{C}))$ On obtient en plus que l'image réciproque de C est un polynome en C.