Ref : Gourdon, Analyse ; 2e édition ; p. 390.

Lemme (Admis) :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les v.p. $\lambda_1 ; \dots ; \lambda_n$ sont tq $Re(\lambda_i) < 0$.

Si $\|\cdot\|$ norme ss-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; alors :

$$\exists \alpha > 0 \; ; K > 0 \quad tq \quad \|e^{tA}\| \leq K e^{-\alpha t} \quad ; \forall t \geq 0.$$

Rq : Norme ss-multiplicative est N tq $N(AB) \leq N(A) \times N(B)$. ex : $N(M) = \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{\|Mx\|}{\|x\|}$.

Théorème : Equation de Sylvester :

$A ; B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq A et B n'ait que des v.p. de partie réelle négative.

Alors $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; $AX + XB = C$ admet une unique sol°. dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $X = -\int_0^\infty e^{tA} C e^{tB} \, dt$.

Démo :

- Résolution de $(E) \begin{cases} Y'(t) = AY(t) + Y(t)B \\ Y(0) = C. \end{cases}$ où $A ; B ; C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 et $Y : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

C'est une équation différentielle linéaire à coefficients constant, elle possède donc une unique solution. (Cauchy-Lipschitz avec la norme ss-multiplicative).

Et $Y(t) = e^{tA} C e^{tB}$ est solution ($Y'(t) = Ae^{tA} C e^{tB} + e^{tA} C B e^{tB}$
$= Ae^{tA} C e^{tB} + e^{tA} C e^{tB} B$)
car e^{tB} et B commutent.

c'est donc l'unique solution.

- Preuve du thm :

Existence : En intégrant (E) entre 0 et t :

$$Y(t) - C = A \int_0^t Y(s) \, ds + \left(\int_0^t Y(s) \, ds \right) B. \quad (*)$$

Comme A et B ont des v.p. de partie réelle négative, on peut appliquer le lemme :

$\exists M_1 > 0 ; \alpha_1 > 0 ; M_2 > 0 ; \alpha_2 > 0$ tq $\begin{cases} \|e^{tA}\| \leq M_1 e^{-\alpha_1 t} \\ \|e^{tB}\| \leq M_2 e^{-\alpha_2 t} \end{cases}$

soit $M = \max(M_1 ; M_2)$.

$\alpha = \min(\alpha_1 ; \alpha_2)$. on a $\begin{cases} \|e^{tA}\| \leq M e^{-\alpha t} \\ \|e^{tB}\| \leq M e^{-\alpha t} \end{cases}$ $\forall t > 0$.

Et $Y(t) = e^{tA} C e^{tB}$ donc $\|Y(t)\| \leq \|e^{tA}\| \cdot \|C\| \cdot \|e^{tB}\| \leq K e^{-2\alpha t}$

où $K = M^2 \|C\|$.

qui est intégrable donc $\int_0^{\infty} Y(s)\,ds$ converge absolument donc

converge donc $Y(s) \underset{s \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

on fait tendre $t \to \infty$; $(*)$ devient :

$$C = AX + XB \quad \text{et} \quad X = -\int_0^{+\infty} Y(s)\,ds = -\int_0^{\infty} e^{tA} C e^{tB}\,dt.$$

d'où l'existence d'une solution.

• <u>unicité</u> :

Pour montrer que la solution X est unique il faut montrer l'injectivité de $\Phi : \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ X \longmapsto AX + XB \end{cases}$.

On a vu dans la partie "existence" la surjectivité de Φ.

Or Φ est un endomorphisme en dimension finie donc

Φ est injectif car surjectif (Thm du rang).

D'où la preuve du thm.

Preuve Lemme :

Étant sur $\mathbb{C}$; χ_A est scindé donc on peut appliquer le thm de Dunford à A :

$A = D + N$ où D diagonalisable ; N nilpotent et $DN = ND$.

Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $D = P D_1 P^{-1}$ où $D_1 = diag(\lambda_1 ; \dots ; \lambda_n)$.

où λ_i ; vp. de D.

$\forall t \in \mathbb{R}$; $e^{tD_1} = diag(e^{t\lambda_1} ; \dots ; e^{t\lambda_n})$.

Soit $\| \cdot \|_\infty$ tq $\|M\|_\infty = \sup\limits_{i;j} |m_{ij}|$ pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Alors $\|e^{tD_1}\|_\infty = e^{-ct}$ où $c = -\sup\limits_i Re(\lambda_i) > 0$.

On est en dim fini donc toutes les normes sont équivalentes

donc $\exists K_1 > 0$ tq $\|e^{tD_1}\| \leq K_1 e^{-ct}$. $\forall t \in \mathbb{R}$.

$\hookrightarrow$ norme de l'énoncé.

Comme $e^{tD} = P^{-1} e^{tD_1} P$ $\forall t \in \mathbb{R}$ alors :

$\forall t \in \mathbb{R}$; $\|e^{tD}\| \leq K_2 e^{-ct}$ où $K_2 = \|P^{-1}\| \cdot K_1 \cdot \|P\|$.

De + N nilpotente donc : $\forall t \in \mathbb{R}$; $e^{tN} = I_n + tN + \dots + \dfrac{t^{n-1} N^{n-1}}{(n-1)!}$.

donc $\|e^{tN}\| \underset{+\infty}{=} o(t^n)$.

Et D et N commutent donc $e^{tA} = e^{tD + tN} = e^{tD} e^{tN}$ $\forall t \in \mathbb{R}^+$.

donc $\|e^{tA}\| \leq \|e^{tD}\| \cdot \|e^{tN}\| \underset{+\infty}{=} o(e^{-ct} t^n)$

Or $t^n \underset{+\infty}{=} o(e^{ct/2})$ donc $e^{-ct} t^n \underset{+\infty}{=} o(e^{-ct/2})$.

Donc $\|e^{tA}\| = o(e^{-\alpha t})$ où $\alpha = \frac{c}{2} > 0$.