

Critère de Sylvester

TR. $M = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique

$\forall k \in [1; n]$ on note $M_k = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k} \in M_k(\mathbb{R})$

M déf pos $\Leftrightarrow \det(M_k) > 0 \ \forall k$

preuve

$\Rightarrow$ q forme quadratique dont M est la matrice dans la base canonique. M_k est la matrice de q restreint à $\text{vect}(e_1, \dots, e_k)$
 q déf pos $\Rightarrow M_k$ déf pos donc $\det(M_k) > 0$

$\Leftarrow$ récurrence forte sur n
 $n=1$ évident

supposons résultat vrai jusqu'au rang $n-1$

H hyperplan = $\text{vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$

D'après hyp de réc $q|_H$ est déf pos donc $E = H \oplus H^\perp$

donc $\exists (e'_1, \dots, e'_{n-1})$ base orthogonale pour $q|_H$ de H et e'_n vecteur normal de $H^\perp$ / $B = (e'_1, \dots, e'_{n-1}, e'_n)$ base de $\mathbb{R}^n$
 et la matrice de q dans cette base est de la forme

$$N = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \alpha \end{pmatrix}$$

P matrice de passage de canonique à B
 $N = {}^t P M P$

$$(\det P)^2 \det(M) = \det(N) = \alpha \quad \text{car } \det M > 0 \text{ d'où } \alpha > 0$$

et donc q est définie positive

Application $\lambda = \left(\frac{1}{1+|i-j|} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ est déf pos

lemme: $M: [0; T] \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ continue

$$t \rightarrow M(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$$

$\forall t \in]0; T[$ $M(t)$ symétrique def pos

$$A = \int_0^T M(t) dt = \left(\int_0^T a_{ij}(t) dt \right)_{1 \leq i, j \leq n} \text{ et sym def pos}$$

preuve $X \neq 0 \in \mathbb{R}^n$

$$\forall t \in]0; T[\quad {}^t X M(t) X > 0$$

$$\text{d'où} \quad \int_0^T {}^t X M(t) X > 0$$

$$\text{et ainsi} \quad {}^t X \int_0^T M(t) dt X > 0$$

$${}^t X A X \text{ et donc } A \text{ sym def pos}$$

$$\text{On a} \quad \frac{1}{1+i-j} = \int_0^1 t^{i-j-1} dt$$

$$A = \int_0^1 M(t) dt \quad \text{ou} \quad M(t) = (t^{i-j-1})_{1 \leq i, j \leq n}$$

D'après le critère et le lemme il suffit donc de montrer

$$D_n(t) = \det M_n(t) > 0 \quad \forall t \in]0; T[\quad (\Rightarrow M(t) \text{ def pos}) \Rightarrow A \text{ def pos}$$

$$D_n(t) = \begin{vmatrix} 1 & t & \dots & t^{n-1} \\ t & 1 & \dots & t^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^{n-1} & t^{n-2} & \dots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t & \dots & t^{n-2} & 0 \\ t & 1 & \dots & t^{n-3} & t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{n-2} & t^{n-3} & \dots & 1 & t \\ t^{n-1} & t^{n-2} & \dots & t & 1-t^2 \end{vmatrix} = (1-t^2) D_{n-1}(t)$$

$$\text{et } D_n(t) = 1$$

$$\text{Par récurrence on en déduit } D_n(t) = (1-t^2)^{n-1}$$

$$\text{Donc } D_n(t) > 0 \quad \forall t \in]0; T[$$

$$\Rightarrow M(t) \text{ def pos}$$

$$\Rightarrow A \text{ def pos}$$