théorème. *Soit H un espace de Hilbert, $C \subset H$ un convexe fermé non vide de H, alors pour tout $x \in H$ il existe un unique $y \in C$ tel que $||x-y|| = d(x,C)$. On appel $y = p_C(x)$ et on a*

$$y = p_C(x) \iff y \in C \text{ et } \forall c \in C,\ Re(< x-y, c-y >) \leq 0$$

Démonstration. *On pose $d = d(x,C) = \underset{c \in C}{inf} ||x-c||$*

existence par la caractéisation séquentielle de la borne inf, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe y_n tel que $||x-y_n||^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}$ Voyons que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. On rappel l'identité du parallélogramme :

$$||z-z'||^2 = 2||z|| + 2||z'|| - ||z+z'||^2$$

que l'on applique a $z = y_n - x,\ z' = y_p - x$ avec $p > n$

$$\begin{aligned}
||y_n - y_p||^2 &= 2||y_n - x|| + 2||y_p - x|| - ||y_n + y_p - 2x|| \\
&\leq \left(2d^2 + \frac{2}{n}\right) + \left(2d^2 + \frac{2}{p}\right) - 4\left|\left|\frac{y_p + y_n}{2} - x\right|\right| \\
&\leq \left(2d^2 + \frac{2}{n}\right) + \left(2d^2 + \frac{2}{p}\right) - 4d^2 \\
&\leq \frac{2}{n} + \frac{2}{p}
\end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N,\ \forall n,p \geq N,\ \frac{2}{n} + \frac{2}{p} \leq \varepsilon$. Ainsi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans C qui est fermé dans H complet donc C est complet. ,$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $y \in C$. Par continuité de la norme, $\lim\limits_{n\to\infty} ||y_n - x||^2 = ||y-x||$. On a donc $||y-x|| \leq \lim\limits_{n\to\infty} d^2 + \frac{1}{n} = d^2$. d'autre part par définitioin de d, $||x-y||^2 \geq d^2$ donc $||x-y|| = d$

unicité soient $y \neq y'$ tel que $d = ||x-y|| = ||x-y'||$. Comme C est convexe $\frac{y+y'}{2} \in C$ d'où par l'identité du parallélogramme :

$$\begin{aligned}
\left|\left|\frac{y+y'}{2} - x\right|\right| &= \frac{1}{4}\left(2||y-x||^2 + 2||y'-x||^2 - ||y-y'||^2\right) \\
&= d^2 - \frac{1}{4}||y-y'||^2 \\
&< d^2
\end{aligned}$$

ce qui contredit la définition de d donc $y = y'$

condition Supposons $y = p_C(x)$ soit $\in C$ pour tout $t \in [0,1],\ (1-t)y + tz \in C$ On a pour tout $z \in C,\ t \in]0,1]$

$$\begin{aligned}
||x - ((1-t)y + t)||^2 &\geq ||x-y||^2 \\
||x - y - t(z-y)||^2 &\geq ||x-y||^2 \\
||x-y||^2 - 2tRe(< x-y|z-y >) + t^2||z-y||^2 &\geq ||x-y||^2 \\
2Re(< x-y|z-y >) &\leq t||z-y|| \qquad t \neq 0!!!
\end{aligned}$$

En faisant tendre t vers 0 on trouve bien $Re(< x-y|z-y >) \leq 0$ Réciproquement supposon que y vérifie $\forall z \in C,\ Re(< x-y|z-y >) \leq 0$. On a alors pour tout $z \in C$,

$$\begin{aligned}
||z-x||^2 &= ||z-y-x+y||^2 \\
&= ||x-y||^2 + ||z-y||^2 - 2Re(< y-x|y-z >) \geq ||x-y||^2
\end{aligned}$$

théorème. *Soit C un s.e.v. de H, Alors $H = C \bigoplus C^{\perp}$ et $x \to p_C(x)$ est un application linéaire contnue.*

théorème. *Soit f une forme linéaire continue sur H, alors il existe un unique vecteur $a \in H$ tel que pour tout $x \in H,\ f(x) =< a|x >$*

Démonstration. *Si* $f = 0$ *alors* $a = 0$*. Si* $f \neq 0$*,* $ker(f) \neq H$ *et* $ker(f)$ *est un sev fermé car* f *est continue. D'après le théorème précedent,* $H = ker(f) \bigoplus ker(f)^{\perp}$*. comme* $ker(f) \neq H$*,* $ker(f)^{\perp} \neq \{0\}$*. Soit* $h \in ker(f)^{\perp} \setminus \{0\}$*. pour* $x \in H$ *on a* $x - \frac{f(x)}{f(h)}h \in ker(f)$ *donc*

$$\left\langle x - \frac{f(x)}{f(h)}h|h \right\rangle = 0$$

$$< x|h > = \left\langle \frac{f(x)}{f(h)}h|h \right\rangle$$

$$< x|h > = \frac{f(x)}{f(h)}||h||^2$$

$$\left\langle x|\frac{\overline{f(h)}}{||h||^2}h \right\rangle = f(x)$$

le vecteur $a = \frac{\overline{f(h)}}{||h||^2}h$ *convient. Soient* a, a' *deux vecteurs qui conviennent.* $\forall x \in H, f(x) =< x|a >=< x|a' >$*, donc* $< x|a - a' >= 0,\ a - a' \in H^{\perp} = \{0\}$ *donc* $a = a'$