théorème. *Théorème de Dini*
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction $f_n : X \to \mathbb{R}$ avec X compact. Si (f_n) est monotone et converge simplement vers $f : X \to \mathbb{R}$, alors (f_n) converge uniformément vers f

théorème. *Théorème de Stone-Weierstrass*
Soit X un espace métrique compact non-vide et A une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ séparante et contenant les fonctions constantes. Alors A est dense pour la norme uniforme.

Lemme. *la fonction* $\begin{array}{cccc} r & : & [0,1] & \to & [0,1] \\ & & x & \to & \sqrt{x} \end{array}$ *est limite uniforme de polynômes réels*

Démonstration. *soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite de fonction $P_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définit par récurrence par :*
$\left\{\begin{array}{c} P_0 = 0 \\ P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{t-P_n^2(t)}{2} \end{array}\right.$ *vérifie $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq P_{n-1} \leq P_n \leq r$ (récurrence en considérant $p_{n+1}(t) - \sqrt{t}$).*
Ainsi c'est une suite de polynômes croissante et bornée donc elle converge simplement vers une limite f : $[0,1] \to [0,1]$. Cette fonction vérifie

$$f(t) = f(t) + \frac{t - f^2(t)}{2}$$

$$f(t) = \sqrt{t}$$

Comme la suite est croissante, par le théorème de Dini la convergence est en fait uniforme.

Lemme. *Soient $f, g \in A$, alors $sup(f,g)$ et $inf(f,g) \in \overline{A}$*

Démonstration. *soit $f \in A$ alors*

$$||f|||_\infty P_n\left(\frac{f}{||f|||_\infty}\right)^2 \to ||f|||_\infty \sqrt{\left(\frac{f}{||f|||_\infty}\right)^2} = |f|$$

uniformément lorsque $n \to \infty$, donc $|f| \in \overline{A}$. on a
$sup(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2} \in \overline{A}$
$inf(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2} \in \overline{A}$

Lemme. *Si A est séparante et contient les fonction constante alors elle est fortement séparante.*

Démonstration. *Soient $x \neq y \in X$, $\alpha \neq \beta \in \mathbb{R}$. Comme A est séparante il existe $f \in A$ telle que $f(x) \neq f(y)$ soit $g : t \to \alpha + (\beta - \alpha)\frac{f(t)-f(x)}{f(y)-f(x)}$. $g \in A$ car A contient les constantes et $g(x) = \alpha$, $g(y) = \beta$*

Démonstration. *du théorème*

Soit $f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$. voyons qu'il existe $v \in A$ telle que $||v - f||_\infty < \varepsilon$

Soit $x \in X$, pour tout $y \in X$ il existe $u_y \in A$ telle que $u_y(x) = f(x)$ et $u_y(y) = f(y)$

On pose $\mathcal{O}_y = \{t \in X | u_y(t) > f(t) - \varepsilon\}$. Comme $x, y \in O_y$, $\{\mathcal{O}_y\}_{y\in X}$ est un recouvrement d'ouvert de X. Il existe donc $y_1, \ldots, y_n \in X$ tels que $X = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{O}_{y_i}$. On pose $v_x = sup_{1\leq i\leq n} u_{y_i}$. Alors $\forall t \in X, v_x(t) > f(t) - \varepsilon$, $v_x(x) = f(x)$.

On pose $\Omega_x = \{t \in X | v_x(t) < f(t) + \varepsilon\}$ Comme $x \in \Omega_x$, $\{\Omega_x\}_{x\in X}$ est un recouvrement d'ouvert de X. Il existe donc $x_1, \ldots, x_m \in X$ tels que $X = \bigcup_{j=1}^m \Omega_{x_j}$. On pose $v = inf_{1\leq j\leq m} v_{x_j}$. Alors $\forall t \in X, f(t) + \varepsilon > v(t) > f(t) - \varepsilon$.

C'est à dire $||v - f||_\infty < \varepsilon$, $f \in \overline{A}$, A est dense dans $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$