

1 Théorème de projection sur un convexe fermé et une application dans $L^2(\mathbb{R})$

Difficulté : Moyenne

Thèmes : Suite de Cauchy, espace de Hilbert, convexité

Leçons concernées : **205, 213, 208, 219, 253**

Références : Brezis, Analyse fonctionnelle

Enoncé 1. Soit $K \subset H$ un convexe fermé non vide d'un Hilbert réel H . Alors pour tout $f \in H$, il existe un unique $u \in K$ tel que

$$|f - u| = \min_{v \in K} |f - v|. \quad (1)$$

De plus, u est caractérisé par la propriété :

$$\begin{cases} u \in K \\ \langle f - u, v - u \rangle \leq 0, \forall v \in K. \end{cases} \quad (2)$$

On note alors $u = P_K f$ le projeté de f sur K

Démonstration. Commençons par considérer une suite (v_n) de K vérifiant

$$d_n = |f - v_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d = \inf_{v \in K} |f - v|.$$

Montrons que (v_n) est de Cauchy. En appliquant l'identité du parallélogramme avec $a = f - v_n$ et $b = f - v_m$, il vient

$$\left| f - \frac{v_n + v_m}{2} \right|^2 + \left| \frac{v_n - v_m}{2} \right|^2 = \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2).$$

Or, $\frac{v_n + v_m}{2}$ est un barycentre, donc contenu dans le convexe K et donc, $|f - \frac{v_n + v_m}{2}| \geq d$, par minimalité de d . Par conséquent,

$$\left| \frac{v_n - v_m}{2} \right|^2 \leq \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2) - d^2 \quad \text{et} \quad \lim_{m, n \rightarrow +\infty} = 0.$$

(v_n) est donc de Cauchy, et puisque K est fermé dans H , (v_n) converge. Donc, nécessairement, $v_n \rightarrow u \in K$ et l'on a $d = |f - u|$. Montrons alors la caractérisation. Supposons que l'on ait (1). Soit $w \in K$. On a

$$v = (1 - t)u + tw \in K, \quad \text{pour } t \in]0, 1].$$

et donc

$$|f - u| \leq |f - [(1 - t)u + tw]| = |(f - u) - t(w - u)|.$$

En passant au carré, il vient

$$|f - u|^2 \leq |f - u|^2 - 2t \langle f - u, w - u \rangle + t^2 |w - u|^2.$$

i.e. $2 \langle f - u, w - u \rangle \leq t |w - u|^2$. Quand $t \rightarrow 0$, on obtient alors ce qu'on souhaitait.

Inversement, si on suppose u vérifiant 2, on a

$$|u - f|^2 - |v - f|^2 = 2 \langle f - u, v - u \rangle - |u - v|^2 \leq 0, \quad \forall v \in K.$$

d'où 1. □

Application. Soit $K = \{f \in L^2(\mathbb{R}), f \geq 0 \text{ p.p.}\}$. K est un convexe fermé de L^2 et le projeté de $f \in L^2(\mathbb{R})$ sur K est f_+ , sa partie positive.

Démonstration. Montrons déjà que K est un convexe fermé (il est évidemment non vide). Pour convexe, c'est évident puisque qu'une combinaison convexe de deux éléments positifs presque partout reste positive presque partout. Pour fermé, on aura besoin d'un corollaire du théorème de Riesz-Fischer: soit (f_n) une suite de Cauchy de $L^2(\mathbb{R})$ qui converge au sens L^2 vers une fonction f , il existe

une extractrice $n \mapsto \varphi(n)$ tel que $(f_{\varphi(n)})$ converge vers f presque partout. Donc si (f_n) est une suite de Cauchy de K convergeant vers f en norme L^2 , pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $f_{\varphi(n)}(x) \rightarrow f(x) \geq 0$. Donc K est fermé par la caractérisation séquentielle des fermés.

Enfin, calculons le projeté de $f \in L^2(\mathbb{R})$. Comme on sait qu'on doit atterir dans K , on se doute que le projeté de f va être f_+ , la partie positive de f , et on a toujours $f = f_+ - f_-$, et $f_+ \cdot f_- = 0$ car les deux fonctions sont à support disjoints. Rappelons que les fonctions f_+ et f_- sont respectivement définies par $\max(f, 0)$ et $\max(-f, 0)$. Formellement, si $g \in K$, on a, par la caractérisation du théorème

$$\langle f - f_+, g - f_+ \rangle = \langle -f_-, g - f_+ \rangle = -\langle f_-, f_+ \rangle - \langle f_-, g \rangle = -\langle f_-, g \rangle.$$

Or g et f_- sont positives presque partout, donc $-\langle f_-, g \rangle \leq 0$ pour tout $g \in L^2(\mathbb{R})$. La caractérisation du théorème nous dit alors que le projeté de f est nécessairement f_+ . $\square$