| leçons: | Chemin au dessus d'une courbe concave | Référence: |
| --- | --- | --- |
| 216. Etude métrique des courbes<br>229. Fonctions monotones, fonctions convexes. | 21 | FGN Analyse 4 p. 322 |

**Enoncé:** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ et concave. Soit $\gamma$ un chemin dans $\mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$, situé au dessus du graphe de $f$ et joignant ses extrémités.

Alors $\ell(\gamma) \geqslant \ell(\Gamma_f)$ où
- $\Gamma_f : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto (x, f(x)) \end{cases}$
- $\ell(\Gamma)$ est la longueur de l'arc $\Gamma$

Définition utilisée ici: $\Gamma$ $\mathcal{C}^1$ par morceaux, subdivision de $[a,b]$ adaptée $x_0 < x_1 < \dots < x_N$

$$\ell(\Gamma) = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \|\Gamma'(t)\| \, dt$$

preuve:

① Traitons le cas d'une fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ concave, affine par morceaux (à la place de $f$)

- Soit $S = (0 = x_0, x_1, \dots, x_N = 1)$ la subdivision minimale telle que $g$ est affine sur les $[x_i, x_{i+1}]$. On note $A_i$ le point $(x_i, g(x_i))$ pour $i \in [\![0,N]\!]$.

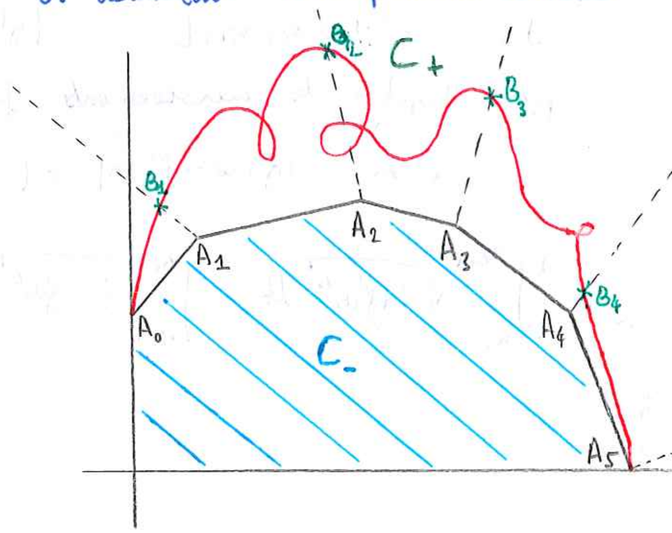
On note
- $C_+ = \{(x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R} \mid y \geqslant f(x)\}$ (ensemble des points au dessus du graphe de $f$)
- $C_- = \{(x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R} \mid y \leqslant f(x)\}$ (ensemble des points en dessous du graphe de $f$)
  $C_-$ est convexe fermé.
- $D_i$ la demi-droite issue de $A_i$, orthogonale à $(A_{i-1}A_i)$, incluse dans $C_+$, ne rencontrant $C_-$ qu'en $A_i$, pour $i \in [\![1,N]\!]$.

$g$ est concave donc les $D_i$ ne se coupent pas et délimitent $N$ composantes connexes de $(C_+ \setminus \coprod_i D_i)$

Par continuité de $\gamma$, il existe une suite finie de temps $t_0 = 0 \leqslant t_1 < \dots < t_N = 1$ telle que

(i) $\forall i \in [\![1,N]\!]$ $\gamma(t_i) \in D_i$

(ii) $\forall i \in [\![1,N]\!]$ $\forall t < t_i$ $\gamma(t) \notin D_i$ (minimalité)




On pose $B_0 = A_0$, $B_N = A_N$ et $B_i = \gamma(t_i)$ pour $i \in [\![1,N-1]\!]$

Pour tout $i \in [\![0,N]\!]$, $A_i$ est le projeté de $B_i$ sur $C_-$.

La projection sur un convexe fermé est 1-lipschitzienne donc $\forall i \in [\![1,N]\!]$ $A_{i-1}A_i \leqslant B_{i-1}B_i$.

On somme sur $i$: $\ell(\Gamma_g) = \sum_{i=1}^{N} A_{i-1}A_i \leqslant \sum_{i=1}^{N} B_{i-1}B_i \leqslant \sum_{i=1}^{N} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt = \ell(\gamma)$

la droite est le plus court chemin

## ② Retour au cas général : $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ concave, $\mathcal{C}^1$.

Soit $S = (0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1)$ une subdivision de $[0,1]$. On note $g_S$ l'unique fonction qui vérifie $\begin{cases} g_S(x_i) = f(x_i) & \forall i \in [\![0,N]\!] \\ g_S \text{ affine sur } [x_i, x_{i+1}] & \forall i \in [\![0,N-1]\!] \end{cases}$

$f$ est concave et $\mathcal{C}^1$ donc $f'$ est décroissante. Par l'égalité des accroissements finis, on a

$\forall i \in [\![1,N-1]\!]$ $\underbrace{\dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}}_{= g_S'|]x_{i-1}, x_i[} \geq f'(x_i) \geq \underbrace{\dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}}_{= g_S'|]x_i, x_{i+1}[}$ d'où $g_S$ concave.

Le segment étant le plus court chemin entre deux points, on a $\ell(\Gamma_{g_S|]x_i,x_{i+1}[}) \leq \ell(\Gamma_{f|]x_i,x_{i+1}[})$ pour tout $i \in [\![0,N-1]\!]$. On somme : $\ell(\Gamma_{g_S}) \leq \ell(\Gamma_f)$.

Il reste à montrer le lemme suivant : $\ell(\Gamma_f) = \sup\limits_{\substack{S \text{ subdivision} \\ \text{de } [0,1]}} \ell(\Gamma_{g_S})$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\eta > 0$ d'uniforme continuité pour $f'$ sur $[0,1]$ pour $\varepsilon$ (par Heine).
Soit $N \in \mathbb{N}$ $N \geq \frac{2}{\eta}$ et $S$ la subdivision régulière de $[0,1]$ de taille $N+1$.
$S = (x_0, \dots, x_N)$ où $x_i = \frac{i}{N}$ pour $i \in [\![0,N]\!]$. Soit $g_S$ définie comme plus haut.

$$\text{On a} \quad g_S'|]x_i, x_{i+1}[ = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

- MQ $\forall x \in [0,1]$ $|g'(x) - f'(x)| \leq \varepsilon$ (sauf aux points $x_i$ où ça n'a pas de sens)

  $\exists i$ $x \in ]x_i, x_{i+1}[$ $|g'(x) - f'(x)| = \left| \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - f'(x) \right|$

  Par l'égalité des accroissements finis, $\exists y \in ]x_i, x_{i+1}[$ $\dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f'(y)$

  D'où $|g'(x) - f'(x)| = |f'(y) - f'(x)| \leq \varepsilon$ car $|x - y| < \eta$.

- $$\left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt - \int_{x_i}^{x_i} \sqrt{1 + g'(t)^2}\, dt \right| \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left| \sqrt{1 + f'(t)^2} - \sqrt{1 + g'(t)^2} \right| dt$$
  $$\leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} K\, |f'(t) - g'(t)|\, dt$$
  $$\leq \frac{K}{N} \varepsilon$$

  $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{1+x^2} \end{cases}$ est $K$-lipschitzienne

On somme : $|\ell(\Gamma_f) - \ell(\Gamma_g)| \leq K\varepsilon$ avec $K$ indépendant de $\varepsilon$. D'où le lemme □