Grifone Algèbre linéaire p 253.

(159 ?)

155
158
160

Développement : Théorème spectral

Théorème : Soit f un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien réel. Alors :
i) f est diagonalisable.
ii) les sous espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.

Preuve :

① Montrons que χ_f est scindé ie que $Sp(f) \subset \mathbb{R}$. Soit A la matrice qui représente f dans une base orthonormé (existe par le procédé d'orthonormalisation de Gram Schmidt) et λ une valeur propre réelle ou complexe de A (λ existe car $\chi_A(X)$, considéré comme polynôme de $\mathbb{C}[X]$, admet, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, au moins une racine) Montrons que $\lambda \in \mathbb{R}$

Rem : on peut faire autrement (cours de Lreust).

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ

Puisque A est symétrique, on a :

$$ {}^t(AX)\bar{X} = {}^tX\,{}^tA\bar{X} = {}^tX\,A\bar{X} \qquad (\star) $$

D'autre part $AX = \lambda X$, en passant au conjugué $\bar{A}\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$ et puisque A est réelle, $A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$.

Pourquoi ? car E est un réel

En reportant dans $(\star)$:

$$ {}^t(AX)\bar{X} = {}^t(\lambda X)\bar{X} = {}^tX\,\bar{\lambda}\,\bar{X} = {}^tX\,A\bar{X} $$

c'est à dire : $\lambda(|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2) = \bar{\lambda}(|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2)$

et donc $\lambda = \bar{\lambda}$ puisque $X \neq 0$. Les valeurs propres sont donc réelles.

② Montrons, par récurrence sur la dimension n de E, qu'il existe une base de vecteurs propres.

I Pour $n = 1$, il n'y a rien à démontrer.

H Supposons la propriété vraie à l'ordre $n-1$. Soit λ une valeur propre de f, x un vecteur propre correspondant à λ et $H = Vect\{x\}^\perp$. Montrons que $\dim H = n-1$ (En effet H est un hyperplan comme noyau de la forme linéaire $y \mapsto \langle x, y \rangle$)

• Montrons que H est stable. Soit $y \in H$ (ie $y \perp x$), montrons que $f(y) \perp x$.

Avérifier (-) 1er égal car f est autoadjoint.

On a $\langle f(y), x \rangle = \langle y, f(x) \rangle = \langle y, \lambda x \rangle (= \bar{\lambda}\langle y, x \rangle) = \lambda \langle y, x \rangle$ (de cette manière on a un produit scalaire réel.)

$= 0$ car $y \perp x$. Ainsi $f(y) \perp x$ et $f(y) \in H$.

Scanné avec CamScanner

demander détails

Vrai ça $v, w \in H$?
A vérifier.

Ainsi la restriction $\tilde{f}$ de f à H est un endomorphisme de H.

- Par ailleurs $\tilde{f}$ est un endomorphisme autoadjoint de H (pour la restriction du produit scalaire à H) car si $v, w \in H$:

$\langle \tilde{f}(v), w \rangle_H = \langle f(v), w \rangle_E = \langle v, f(w) \rangle_E = \langle v, \tilde{f}(w) \rangle_H$

Or $\dim H = n-1$, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base $\{e_2, \dots, e_n\}$ formée de vecteurs propres de $\tilde{f}$. Il est clair que $\{x, e_2, \dots, e_n\}$ est une base de E (en dim et c'est libre, en effet si $\sum \lambda_i e_i + \lambda_1 x = 0$ alors scalaire x, $\lambda_1 \|x\|^2 = 0$ donc $\lambda_1 = 0$, de plus les λ_i, $i \geq 2$ valent 0 car e_i ; $i \geq 2$ est une base) formée de vecteurs propres (x vp de f par hypothèse les e_i sont vp de $\tilde{f}$ donc de f) de f. Donc f est diagonalisable sur E.

③ Montrons que les sous-espaces sont deux à deux orthogonaux. Soient v_1 et v_2 vecteurs propres correspondant aux valeurs propres λ_1, λ_2 avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Montrons que $v_1 \perp v_2$.

On a : $\langle f(v_1), v_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle = \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle$

On f est autoadjoint, donc :

$$\langle f(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, f(v_2) \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle$$

Ainsi $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ et puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on a : $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.

Remarque : Les matrices symétriques complexes (non réelles) ne sont pas nécessairement diagonalisables (ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{C}$).

Par exemple, soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. On a $\chi_A(X) = X^2 - \beta X - \alpha^2$

Si $\beta^2 + 4\alpha^2 = 0$ (dans $\mathbb{C}$ cela est possible sans que α et β soient tous deux nuls) on aura deux racines confondues, c'est à dire une valeur propre double $\lambda = \frac{\beta}{2}$ et donc $\chi_A(X) = \left(X - \frac{\beta}{2}\right)^2$. A serait alors diagonalisable si et seulement si $m_A(X) = X - \frac{\beta}{2}$ c'est à dire $A = \left(\frac{\beta}{2}\right) I$ ce qui est exclu.

Par exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$ est symétrique et non diagonalisable.

Scanné avec CamScanner