

Théorème de GROTHENDIECK

[BERNIS, p 127]

ÉNONCÉ :

Théorème : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré de mesure finie. Soit un réel $p \geq 1$ et V un sous-espace vectoriel de $L^p(\mu)$. On suppose :

- V est fermé dans $L^p(\mu)$.
- $V \subset L^\infty(\mu)$.

Alors $\dim(V) < +\infty$.

DÉVELOPPEMENT : On peut supposer, sans perte de généralité, que $\mu(\Omega) = 1$. Il suffit de définir une nouvelle mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$ définie pour tout $A \in \mathcal{F}$ par $\lambda(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$.

LEMMES :

1. Sur l'espace vectoriel V , les normes $||.||_p$ et $||.||_\infty$ sont équivalentes.
2. Il existe un réel strictement positif β tel que

$$\forall f \in V, \quad ||f||_\infty \leq \beta ||f||_2$$

Démonstration. 1. Comme $\mu(\Omega) < +\infty$, on a, par inégalité de HÖLDER, que l'injection canonique $L^\infty(\mu) \rightarrow L^p(\mu)$ est continue. En particulier, pour tout $f \in V$, on a :

$$||f||_p \leq \underbrace{\mu(\Omega)^{\frac{1}{p}}}_{=1} ||f||_\infty$$

Ainsi, V est également un sous-espace vectoriel fermé de $L^\infty(\mu)$ comme image réciproque d'un fermé par une application continue. Par complétude de $L^\infty(\mu)$, l'espace $(V, ||.||_\infty)$ est de BANACH. Par le même argument, on a que $(V, ||.||_p)$ est également de BANACH.

Voyons que le graphe de l'injection canonique $\iota : (V, ||.||_p) \rightarrow (V, ||.||_\infty)$ est fermé. On se donne $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de V telle que : $f_n \xrightarrow{L^p} f$ et $f_n = \iota(f_n) \xrightarrow{L^\infty} g$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ avec f et g sont des éléments de V .

Par RIESZ-FISHER, il existe une suite extraite, $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge μ -presque partout vers f . Mais $(\iota(f_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers g dans $L^\infty(\mu)$ donc $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge μ -presque partout vers g , d'où $g = f$ μ -presque partout, i.e., $g = f = \iota(f)$ dans $L^\infty(\mu)$. Ceci montre que le graphe de ι est fermé dans $L^p(\mu) \times L^\infty(\mu)$. En vertu du théorème du GRAPHE FERMÉ, ι est une application linéaire continue. Il existe donc une constance $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ telle que :

$$\forall f \in V, \quad ||f||_\infty \leq \alpha ||f||_p$$

On a ainsi montré l'équivalence des normes.

2. Soit $f \in V$. Distinguons 2 cas :

- Si $p < 2$, on a, par l'inégalité de HÖLDER :

$$||f||_p \leq \mu(\Omega)^{\frac{2-p}{2p}} ||f||_2 \leq ||f||_2$$

d'où :

$$||f||_\infty \leq \alpha ||f||_2$$

- Si $p \geq 2$, on a :

$$||f||_p^p \leq ||f||_\infty^{p-2} ||f||_2^2$$

d'où :

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^p ||f||_{\infty}^p \leq ||f||_{\infty}^{p-2} ||f||_2^2$$

Finalement, pour tout $f \in V$, on a :

$$||f||_{\infty} \leq \alpha^{\frac{p}{2}} ||f||_2$$

En prenant β suivant les cas α ou $\alpha^{\frac{p}{2}}$, on obtient le résultat. $\square$

Démonstration. : Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $(f_n)_{n \in [1,N]}$ une famille libre d'éléments de V . Quitte à lui appliquer dans $L^2(\mu)$ le procédé d'orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT, on peut supposer que cette famille est orthonormée.

Considérons alors l'application :

$$T = \left\{ \begin{array}{l} \overline{B_{\mathbb{C}^N}(0,1)} \longrightarrow V \\ b = (b_1, \dots, b_N) \longmapsto \sum_{i=1}^N b_i f_i \end{array} \right.$$

Comme $(\overline{B_{\mathbb{C}^N}(0,1)}, ||\cdot||_2)$ est un espace métrique compact, il est séparable. On dispose donc d'une suite dense $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\overline{B_{\mathbb{C}^N}(0,1)}$. D'après le lemme et l'orthonormalité de la famille $(f_n)_{n \in [1,N]}$, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$||T(b_k)||_{\infty} \leq \beta ||T(b_k)||_2 \leq \beta$$

Par la définition de la norme $L^{\infty}(\mu)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $A_k \in \mathcal{A}$, ensemble de mesure pleine, tel que, pour tout $x \in A_k$, on ait :

$$|T(b_k)(x)| \leq \beta$$

Posons $A := \bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k$ qui est également de mesure pleine comme intersection dénombrable de tels ensembles. Pour tout $x \in A$ et pour

tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$|T(b_k)(x)| \leq \beta$$

Or, pour tout $x \in A$, $b \mapsto T(b)(x)$ est une application continue car linéaire en dimension N . Donc on peut étendre par densité l'inégalité à tout élément de $\overline{B_{\mathbb{C}^N}(0,1)}$.

Pour tout $x \in A$, on définit un élément $c(x) \in \overline{B_{\mathbb{C}^N}(0,1)}$ par la relation suivante :

$$c(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{(\overline{f_1(x)}, \dots, \overline{f_N(x)})}{||(\overline{f_1(x)}, \dots, \overline{f_N(x)})||_2}, & \text{ lorsque } (f_1(x), \dots, f_N(x)) \neq (0, \dots, 0) \\ (0, \dots, 0), & \text{ sinon.} \end{array} \right.$$

Ainsi, pour tout $x \in A$,

$$\sum_{i=1}^N |f_i(x)|^2 = |T(c(x))(x)|^2 \leq \beta^2$$

Enfin, en intégrant cette inégalité sur A (qui est de mesure pleine), et par orthonormalité de la famille $(f_n)_{n \in [1,N]}$, on obtient :

$$\begin{aligned} N &= \sum_{i=1}^N \underbrace{\int_X |f_i(x)|^2 d\mu(x)}_{=1} \\ &= \int_A \sum_{i=1}^N |f_i(x)|^2 d\mu(x) \\ &\leq \beta^2 \int_A d\mu(x) \\ &= \beta^2 \end{aligned}$$

Le cardinal d'une famille libre est donc majoré par β^2 , donc V est de dimension finie. $\square$

Remarque : Il s'agit d'un résultat "vitrine" de l'analyse car il nécessite de maîtriser bon nombre de résultats classiques.