8 Formule des compléments

ref : Stein-Shakarchi : complex analysis

THÉORÈME 8.1 *On définit* Γ *sur* $]0,+\infty[$ *par* $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\mathrm{d}t$. *On a alors pour* $s\in]0,1[$,

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin \pi s}$$

PREUVE.

Tout d'abord, Γ est bien définie pour $s>0$ car en 0 l'intégrande est équivalent à t^{s-1} qui est intégrable par le critère de Riemann et en $+\infty$ on a une décroissance exponentielle.

Réécrivons le membre de gauche :

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\int_0^{+\infty}(\int_0^{+\infty} u^{-s}e^{-u}\mathrm{d}u)t^{s-1}e^{-t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}(vt)^{-s}e^{-vt}t^s e^{-t}\mathrm{d}v\mathrm{d}t$$

en faisant le changement de variable $u=tv$.

D'où, par Fubini,

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\int\int\frac{e^{-(1+v)t}}{v^s}\mathrm{d}v\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}v}{(1+v)v^s}$$

En posant $a=1-s$, ce qui ne change pas le terme de gauche, on est donc ramené à calculer, pour $a\in]0,1[$:

$$\int_0^{+\infty}\frac{v^{a-1}}{1+v}\mathrm{d}v$$

On va utiliser le théorèmes des résidus : Tout d'abord, en posant $v=e^x$, qui est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$ on se ramène à calculer :

$$I(a)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}\mathrm{d}x$$

La fonction $f(z)=\frac{e^{az}}{1+e^z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus i\pi+2i\pi\mathbb{Z}$.

Calculons le résidu de f en $i\pi$.

$$(z-i\pi)f(z)=e^{az}\frac{z-i\pi}{e^z-e^{i\pi}}\xrightarrow[z\to i\pi]{} e^{ia\pi}e^{i\pi}=-e^{ia\pi}$$

On applique le théorème des résidus à f avec le contour Γ défini par le rectangle de sommets $-R,R,R+2i\pi,-R+2i\pi$ dans le demi-plan supérieur orienté dans le sens trigonométrique. Ce contour enferme seulement un pôle de f à savoir $i\pi$.

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z=-2i\pi e^{ia\pi}$$

Calculons le membre de gauche morceaux par morceaux :

$$|\int_R^{R+2i\pi}f(z)\mathrm{d}z|=|\int_0^{2\pi}\frac{e^{a(R+i\theta)}}{1+e^{R+i\theta}}\mathrm{d}\theta|\le Ce^{(a-1)R}\xrightarrow[R\to+\infty]{}0$$

$$|\int_{-R}^{-R+2i\pi}f(z)\mathrm{d}z|=|\int_0^{2\pi}\frac{e^{a(-R+i\theta)}}{1+e^{-R+i\theta}}\mathrm{d}\theta|\le C'e^{-aR}\xrightarrow[R\to+\infty]{}0$$

$$\int_{R+2i\pi}^{R-2i\pi} f(z)\mathrm{d}z = \int_{R}^{-R} f(2i\pi + x)\mathrm{d}x = -e^{2i\pi a}\int_{-R}^{R} f(z)\mathrm{d}z$$

En passant à la limite quand $\mathbb{R}$ tend vers $+\infty$, on obtient, puisque f est intégrable sur $\mathbb{R}$:

$$I(a)(1 - e^{2i\pi a}) = -2i\pi e^{i\pi a}$$

D'où, en factorisant par l'arc-moitié :

$$I(a) = -2i\pi\frac{e^{i\pi a}}{1 - e^{2i\pi a}} = \frac{\pi}{\sin \pi a}$$

$\square$

Leçons concernées : fonctions holomorphes, méthode de calcul d'intégrales.