

Taubérien fort

[131 DÉVELOPPEMENTS, p]

ÉNONCÉ :

Théorème : Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Si $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \ell$, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge vers ℓ .

DÉVELOPPEMENT :

LEMME : Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n P(x^n) = \int_0^1 P(t) dt$$

Démonstration. P est borné sur $[0, 1]$, donc pour tout $x \in [0, 1]$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n P(x^n)$ converge absolument donc converge. Pour le monôme $x \mapsto x^p$, $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in [0, 1[, \quad (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n(p+1)} = \frac{1-x}{1-x^{p+1}} = \frac{1}{\sum_{i=0}^p x^i}$$

donc :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n (x^n)^p = \frac{1}{k+1} = \int_0^1 x^p dt$$

Par linéarité de l'intégrale, le résultat reste valable pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$. □

Démonstration. (théorème) : Soit (a_n) une suite de nombres réels telle que $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n \geq 0} a_n x^n = 0$. Soit g la fonction

indicatrice de l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
On considère la fonction $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$h(x) = \frac{g(x) - x}{x(1-x)} = \begin{cases} -\frac{1}{1-x} & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ \frac{1}{x} & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Soit $\epsilon > 0$ fixé. Soient s_1, s_2 continues sur $[0, 1]$ vérifiant $s_1 \leq h \leq s_2$ et $\int_0^1 (s_2(t) - s_1(t)) dt < \epsilon$.
En vertu du théorème de WEIERSTRASS, on dispose de deux polynômes t_1 et t_2 tels que $|t_1 - s_1| < \epsilon$ et $|t_2 - s_2| < \epsilon$ sur $[0, 1]$. Ainsi, les polynômes $u_1 = t_1 - \epsilon$ et $u_2 = t_2 + \epsilon$ vérifient $u_1 < s_1 \leq h \leq s_2 < u_2$ et $u_2 - u_1 \leq s_2 - s_1 + 4\epsilon$ donc

$$\int_0^1 (u_2(x) - u_1(x)) dx < 5\epsilon$$

Comme $g(x) = x + x(1-x)h(x)$ sur $[0, 1]$, les polynômes $p_1(x) = x + x(1-x)u_1(x)$ et $p_2(x) = x + x(1-x)u_2(x)$ vérifient $p_1(0) = p_2(0) = 0$, $p_1(1) = p_2(1) = 1$, $p_1 \leq g \leq p_2$ et le polynôme $q(x)$ définie par :

$$q(x) = \frac{p_2(x) - p_1(x)}{x(1-x)} = u_2(x) - u_1(x)$$

et vérifie $\int_0^1 q(x) dx < 5\epsilon$.
En considérant Φ l'ensemble des fonctions $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- Pour tout $x \in [0, 1[$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n \phi(x^n)$ converge.
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n \geq 0} a_n \phi(x^n) = 0$.

Il est clair que $\sum_{n \geq 0} a_n g(x^n)$ converge pour tout $x \in [0, 1[$ car le terme de cette série est nul dès que $x^n < \frac{1}{2}$.
Par hypothèse, il existe $M > 0$ tel que $|a_n| \leq \frac{M}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme $p_1 \leq g \leq p_2$, on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1[, \quad \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (g(x^n) - p_1(x^n)) \right| &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| (p_2 - p_1)(x^n) \\ &\leq M \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n (1 - x^n)}{n} q(x^n) \\ &\leq M(1 - x) \sum_{n=1}^{+\infty} x^n q(x^n) \quad (*) \end{aligned}$$

On a $p_1 \in \Phi$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x) \sum_{n \geq 1} x^n q(x^n) = \int_0^1 q(t) dt < 5\epsilon$ d'où :

$$\exists \lambda \in [0, 1[, \quad \forall x \in [\lambda, 1[, \quad \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n p_1(x^n) \right| < \epsilon \quad \text{et} \quad (1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} x^n q(x^n) < 5\epsilon$$

Par (*), on obtient, pour tout $x \in [\lambda, 1[$:

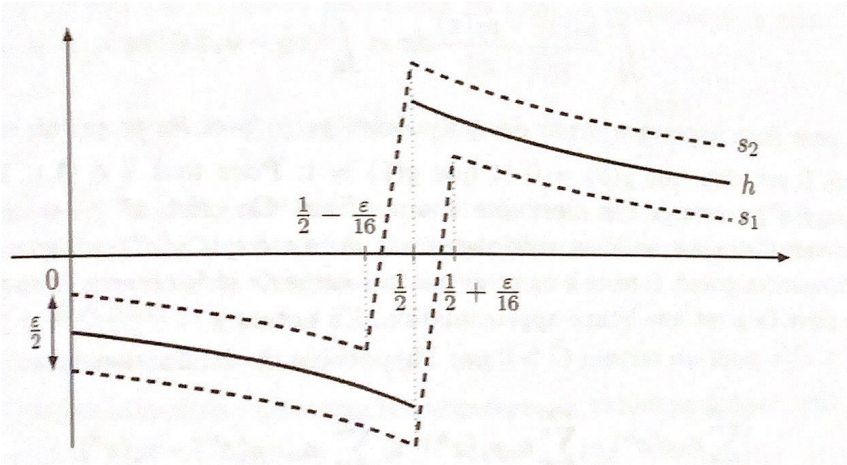
$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) \right| < (5M + 1)\epsilon$$

Donc $g \in \Phi$.

Or, par définition de g , on a

$$\forall x \in [0, 1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) = \sum_{n=0}^{\left[\frac{-\log 2}{\log x} \right]} a_n$$

d'où le résultat, lorsque $x \rightarrow 1^-$ pour $\ell = 0$. Reste à remplacer pour le cas général a_0 par $a_0 - \ell$. $\square$



Précisions sur les fonctions s_1 et s_2 :

On définit s_1 par $h + \frac{\epsilon}{4}$ sur la partie définie par $[0, 1] \setminus [\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{16}, \frac{1}{2}]$ et de compléter de façon affine sur le segment central.

De même, on définit s_2 par $h - \frac{\epsilon}{4}$ sur la partie définie par $[0, 1] \setminus [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{16}]$ et de compléter de façon affine sur le segment central.

Ainsi, la fonction $|s_2 - s_1|$ est bornée par :

$$\begin{cases} \frac{\epsilon}{2} & \text{sur } [0, 1] \setminus [\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{16}, \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{16}] \\ 4 + \frac{\epsilon}{2} & \text{sur } [\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{16}, \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{16}] \end{cases}$$

Ainsi, on obtient la majoration

$$\int_0^1 |s_2 - s_1| \leq \epsilon$$

Application : $F(x) = \ln(1 + x) = -\sum_{n \geq 1} \frac{(-x)^n}{n}$ donc $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$.