Suite de polygones

[GOURDON, p 190]

ÉNONCÉ :

Théorème : On définit par récurrence une suite $(P^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ par $P^{(0)} = (z_1^{(0)},\dots,z_n^{(0)}) \in \mathbb{C}^N$ et $P^{(k+1)} = \left(\frac{z_1^{(k)}+z_2^{(k)}}{2},\dots,\frac{z_{n-1}^{(k)}+z_n^{(k)}}{2},\frac{z_n^{(k)}+z_1^{(k)}}{2}\right)$ pour $k\in\mathbb{N}$.
Alors $P^{(k)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} (g,g,\dots,g)$ où $g = \mathrm{Isobar}(z_1^{(0)},\dots,z_n^{(0)})$.

DÉVELOPPEMENT :

LEMME : Soient $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{C}$. Alors :

$$det\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix}\right) = \prod_{0\le\ell\le n-1} Q(\omega^\ell)$$

où $\omega = \exp(2i\pi/n)$ et $Q(X) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}X^i$.

Démonstration. Posons les matrices :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix}$$

On remarque facilement que $A = \sum_{k=0}^{n-1} a_{i+1}J^k$ donc $A = Q(J)$. Or J admet un polynôme annulateur scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ qui est $P(X) = X^n - 1 = \prod_{\ell=0}^{n-1}(X-\omega^\ell)$. Ainsi, les valeurs propres de J sont les $(\omega^\ell)_{0\le\ell\le n-1}$. On en déduit ainsi immédiatement que les valeurs propres de $Q(J)$ sont les $(Q(\omega^\ell))_{0\le\ell\le n-1}$. Le déterminant de A étant le produit des valeurs propres de cette dernière, on en déduit le résultat. $\square$

Démonstration. (*théorème*) : Pour $k\ge 0$, $P^{(k+1)} = AP^{(k)}$ où $A = \frac{1}{2}I_n + \frac{1}{2}J$. Une récurrence évidente montre que pour tout $k\ge 0$, $P^{(k)} = A^kP^{(0)}$. Déterminons les valeurs propres de A. Pour $\lambda\in\mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} det(\lambda I_n - A) &= \det\left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)I_n - \frac{1}{2}J\right) \\ &= \prod_{\ell=0}^{n-1}\left(\left(\lambda-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\omega^l\right) \qquad \text{(par le lemme)} \\ &= \prod_{\ell=0}^{n-1}\left(\lambda - \frac{1+\omega^l}{2}\right) \end{aligned}$$

Les valeurs de propres de A sont les $(\lambda_\ell)_{0\le\ell\le n-1} = \left(\frac{1+\omega^\ell}{2}\right)_{0\le l\le n-1}$.
Étant distinctes deux à deux, A est diagonalisable. On dispose donc d'une matrice $Q\in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = Qdiag(\lambda_0,\dots,\lambda_{n-1})Q^{-1}$. Or, pour $\ell\in\{1,\dots,n-1\}$, on a $|\lambda_\ell|<1$, donc :

$$A^k = Qdiag(\lambda_0^k,\dots,\lambda_{n-1}^k)Q^{-1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} QE_{1,1}Q^{-1}$$

Ainsi $P^{(k)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} QE_{1,1}Q^{-1}P^{(0)} = P^{(\infty)}$. $P^{(\infty)}$ est donc un point fixe de A, *i.e.* un vecteur propre (à droite) associé à la valeur propre 1. Or $\dim(E_1) = 1$ et $(1,\dots,1)\in E_1$, donc il existe $g\in\mathbb{C}$ tel que :

$$P^{(\infty)} = (g,\dots,g)$$

Par associativité des barycentres, pour tout $k \geq 0$, $\mathrm{Isobar}(P^{(k+1)}) = \mathrm{Isobar}(P^{(0)})$. Finalement on a :

$$\begin{aligned} g &= \mathrm{Isobar}((g, \dots, g)) \\ &= \mathrm{Isobar}(P^{(\infty)}) \\ &= \lim_{k \to +\infty} \mathrm{Isobar}(P^{(k)}) \\ &= \mathrm{Isobar}(P^{(0)}) \end{aligned}$$

Le passage à la limite étant justifié par la continuité de l'application $(z_1, \dots, z_n) \mapsto \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$. $\square$

<u>Remarques</u> :

- Le développement est relativement court si maîtrisé : on prendra le temps d'illustrer avec un dessin d'un polygone dont les sommets sont les racines n-ièmes de l'unité.
- On utilise le fait que, pour $P \in \mathbb{K}[X]$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, alors $Sp(P(A)) = \{P(\lambda) \mid \lambda \in Sp(A)\}$. Ceci est bien entendu faux si $\mathbb{K}$ n'est pas algébriquement clos (considérer $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et comparer le spectre de A et A^2 sur $\mathbb{R}$ pour s'en convaincre facilement).
- En raisonnant coordonnée par coordonnée et par un raisonnement analogue, on peut montrer le même résultat pour un polytope de $\mathbb{R}^n$.
- Il n'y a pas de référence complète pour ce développement, il faut donc l'avoir bien en tête !