Théorème de STONE-WEIERSTRASS

[HIRSCH-LACOMBE, p]

ÉNONCÉ :

Soit (K,d) un espace métrique compact non vide.

Théorème : Soit H une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ séparante et unitaire. Alors H est dense dans $(\mathcal{C}(K,\mathbb{R}), ||.||_\infty)$.

DÉVELOPPEMENT :

LEMMES :

1. Il existe une suite $(P_N)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}[X])^{\mathbb{N}}$ telle que :
$$P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{U} |.| \quad \text{sur} \quad [-1,1]$$
2. Si $f,g \in H$, alors $\min(f,g)$ et $\max(f,g)$ sont dans $\overline{H}$.
3. Pour $x_1 \neq x_2 \in K$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, il existe $u \in H$ telle que :
$$u(x_1) = \alpha_1 \quad \text{et} \quad u(x_2) = \alpha_2$$

Démonstration. 1. On définit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $P_0 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}(X^2 - P_n^2)$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $0 \leq P_n \leq P_{n+1} \leq |.|$ sur $[-1,1]$.

- Pour $n = 0$, on a $P_0 = 0 \leq P_1 = \frac{X^2}{2} \leq |.|$ sur $[-1,1]$.
- Supposons le résultat vrai au rang $n \leq 1$. On a $P_{n+1} \leq |.|$, donc $P_{n+2} - P_{n+1} \geq 0$. Pour $x \in [-1,1]$, on a :
$$|x| - P_{n+2}(x) = (|x| - P_{n+1}(x))\left(1 - \frac{1}{2}(|x| + P_{n+1}(x))\right) \geq 0$$

Ainsi $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée : elle converge. Sa limite h vérifie, pour $x \in [-1,1]$, $0 \leq h(x) \leq |x|$ et $h(x) = h(x) + \frac{1}{2}(x^2 - h(x)^2)$, donc $h(x) = |x|$. En vertu du théorème de DINI, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $|.|$ sur $[-1,1]$.

2. Soient $f,g \in H$, alors $\min(f,g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}$ et $\max(f,g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}$. Il suffit donc de montrer que si $h \in H$, alors $|h| \in \overline{H}$. Si $h \neq 0$, on a, en notant $P_n(X) = \sum_{k=0}^{2^n} a_k X^k$:
$$P_n\left(\frac{h}{||h||_\infty}\right) = \sum_{k=0}^{2^n} a_k \left(\frac{h}{||h||_\infty}\right)^k \in H$$
car H est une sous-algèbre unitaire de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$. On en déduit, par convergence uniforme de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $|.|$ sur $[-1,1]$, que $\frac{|h|}{||h||_\infty} \in \overline{H}$, donc $|h| \in \overline{H}$.

3. Comme H est séparante, on dispose d'un $u_0 \in H$ telle que $u_0(x_1) \neq u_0(x_2)$. On a alors le système de CRAMER suivant :
$$\begin{cases} \lambda u_0(x_1) + \mu = \alpha_1 \\ \lambda u_0(x_2) + \mu = \alpha_2 \end{cases}$$
qui admet donc une solution $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ et en posant $u = \tilde{\lambda} u_0 + \tilde{\mu}$, on a $u \in H$ qui est satisfaisant.

$\square$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$. Soit $\epsilon > 0$. Soit $x \in K$. Pour tout $y \in K$, il existe $u_y \in H$ telle que $u_y(x) = f(x)$ et $u_y(y) = f(y)$.

Posons alors l'ouvert $\mathcal{O}_y = \{x' \in K \mid u_y(x') > f(x') - \epsilon\}$ contenant x et y. On a donc $K = \bigcup_{y \in K} \mathcal{O}_y$. Comme K est compact, on dispose, par la propriété de BOREL-LEBESGUE, d'éléments $y_1, \dots, y_r \in K$ tels que :

$$K = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{y_i}$$

Posons alors $v_x = \max_{1 \leq i \leq r} u_{y_i}$. Par le deuxième point du lemme, on a $v_x \in \overline{H}$. De plus, $v_x(x) = f(x)$ et pour tout $x' \in K$, on a $v_x(x') > f(x') - \epsilon$.
Posons alors $\Omega_x := \{x' \in K \mid v_x(x') < f(x') + \epsilon\}$ qui est un ouvert contenant x, donc $K = \bigcup_{x \in K} \Omega_x$. On dispose donc de nouveau d'éléments $x_1, \dots, x_m \in K$ tels que :

$$K = \bigcup_{j=1}^{m} \Omega_{x_j}$$

Posons donc $v = \min_{1 \leq j \leq m} v_{x_j} \in \overline{H}$. On a donc, pour tout $x \in K$, $|v(x) - f(x)| \leq \epsilon$. Comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit que $f \in \overline{H}$, d'où le résultat.
Donc H est dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. $\square$

Remarques :

- On utilise le théorème de DINI qu'il faut savoir montrer.
- Ceci n'est plus vrai pour des fonctions à valeurs complexes : il faut que l'algèbre soit de plus stable par auto-conjugaison.
- Il faut connaître des applications de ce théorème (densité de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, des fonctions lipschitziennes dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$, séparabilité de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$, théorème des moments).