Théorème de STAMPACCHIA

[BREZIS, p 83]

ÉNONCÉ :

Théorème : Soient $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de HILBERT et $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive.
Soit K un convexe fermé non vide. Pour tout $\varphi \in H'$, il existe un unique $u \in K$ tel que pour tout $v \in K, a(u, v-u) \geq \varphi(v-u)$.
De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété :

$$\begin{cases} u \in K \\ \frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) = \min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v) \right\} \end{cases}$$

DÉVELOPPEMENT : Soit $\varphi \in H'$. En vertu du théorème de RIESZ-FRÉCHET, on dispose d'un unique $x_\varphi \in H$ tel que, pour tout $v \in H$, on ait $\varphi(v) = \langle x_\varphi, v \rangle$.
Par ailleurs, pour $u \in H$ fixé, l'application $v \mapsto a(u,v)$ est une forme linéaire continue sur H, on dispose donc également d'un unique $Au \in H$ tel que $a(u,v) = \langle Au, v \rangle$, pour tout $v \in H$. L'application $A : H \to H$ est un opérateur linéaire de H dans H par unicité de $Au \in H$. De plus, par hypothèses sur a, on a :

$$\begin{cases} \langle Au, u \rangle = a(u,u) \geq \alpha ||u||^2 \\ ||Au||^2 = \langle Au, Au \rangle = a(u, Au) \leq c||u|| ||Au|| \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} \langle Au, u \rangle \geq \alpha ||u||^2 \\ ||Au|| \leq c||u|| \end{cases}$$

Pour $\epsilon > 0$, on a donc les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} &\exists! u \in K,\ \forall v \in K,\ a(u, v-u) \geq \varphi(v-u) \\ \Longleftrightarrow\ & u = p_K(\epsilon(x_\varphi - Au) + u) \end{aligned}$$

où p_K désigne la projection sur le convexe fermé K.
Pour $v \in K$, on pose $s(v) = p_K(\epsilon(x_\varphi - Av) + v)$. La projection sur un convexe fermé étant une application 1-lipschitzienne, il vient :

$$||s(v_1) - s(v_2)||^2 \leq \underbrace{(1 - 2\epsilon\alpha + \epsilon^2 c^2)}_{:=k^2} ||v_1 - v_2||^2$$

En prenant $\epsilon \in]0, \frac{2\alpha}{c^2}[$, on a

$$||s(v_1) - s(v_2)||^2 \leq \underbrace{k^2}_{<1} ||v_1 - v_2||^2$$

Ainsi, pour un $\epsilon > 0$ bien choisi, s définit une contraction de K dans lui-même. K étant un complet comme fermé d'un complet, le théorème de point fixe de PICARD assure l'existence d'un unique point fixe, d'où le résultat.

Si a est de plus symétrique, la coercivité de ce dernier nous assure qu'il s'agit d'un produit scalaire sur H. Sa norme associée $||u||_a := a(u,u)^{\frac{1}{2}}$ est équivalente à la norme $||.||$ sur H, donc $(H, ||.||_a)$ est un espace de HILBERT. Par RIESZ-FRÉCHET, on dispose d'un unique $g \in H$, tel que pour tout $v \in H$, $\varphi(v) = a(g,v)$. l'inégalité de STAMPACCHIA devient alors :

$$\forall v \in K,\ a(u, v-u) \geq a(g, v-u)$$

donc $u = p_K(g)$ est la projection de g sur K au sens du produit scalaire définie par a. En vertu du théorème de projection sur un convexe fermé, cela revient à trouver $u \in K$ tel que $a(g-u, g-u)^{\frac{1}{2}} = \min_{v \in K} a(g-v, g-v)^{\frac{1}{2}}$. Mais ceci revient exactement à minimiser, sur K, $a(g-v, g-v)$ ou encore $\frac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v)$.

Remarques :

- Il faut connaître le théorème de LAX-MILGRAM qu'on peut retrouver à l'aide du théorème de STAMPACCHIA.
- Il faut avoir au moins une application directe de ce théorème (existence d'une solution faible pour le problème de DIRICHLET, par exemple).
- On utilise le théorème de RIESZ-FRÉCHET à trois reprises : sa preuve doit être connue.