$SO_3(\mathbb{R})$ *est simple.*

[CALDERO, p 9]

ÉNONCÉ :

Théorème :
Le groupe $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

DÉVELOPPEMENT :

LEMME :

1. $SO(n)$ est engendré par les retournements.
2. Un sous-groupe distingué de $SO(3)$ contenant un retournement est égal à $SO(3)$.

Démonstration. 1. Soit $\sigma \in SO(n)$. σ étant en particulier un élément $\sigma \in O(n)$, c'est un produit de $k-$réflexions orthogonales. On peut supposer que deux réflexions qui se succèdent dans la décomposition soient distinctes. Voyons que si H et H' sont deux hyperplans distincts, alors il existe un couple (r, r') de retournements tels que $s_H \circ s_{H'} = r \circ r'$.
En effet, en posant $F = H \cap H'$, on a, par la formule de GRASSMANN :

$$\dim(F) = \dim(H) + \dim(H') - \dim(H + H') = n - 2$$

car H et H' sont supposés distincts. Soit $(e_1, \dots, e_{n-2})$ une base orthonormée de F, que l'on complète en une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On définit alors r et r' par :

$$\begin{aligned}
r(e_i) &= e_i, \quad 1 \leq i \leq n-3, \\
r(e_{n-2}) &= -e_{n-2}, \; r(e_{n-1}) = s_H(e_{n-1}), \; r(e_n) = s_H(e_n), \\
r'(e_i) &= e_i, \quad 1 \leq i \leq n-3, \\
r'(e_{n-2}) &= -e_{n-2}, \; r'(e_{n-1}) = s_{H'}(e_{n-1}), \; r'(e_n) = s_{H'}(e_n),
\end{aligned}$$

On a $s_H \circ s_{H'} = r \circ r'$ car l'égalité est valable sur F et $F^\perp$. Vérifions que r et r' sont des retournements.
Il est clair que la restriction de s_H à F est l'identité donc s_H stabilise $F^\perp$, et se restreint en un automorphisme orthogonal de déterminant -1 sur $F^\perp$. Ainsi, la restriction de s_H à $F^\perp$ est une symétrie plane possédant une droite propre associée à la valeur propre 1 et une droite propre associée à la valeur propre -1. Donc r est bien un retournement, et il en est de même pour r'.

2. Supposons que H contienne un retournement d'axe D, noté r_D. Soient D' une autre droite et $s \in SO(3)$ qui envoie D sur D'. Alors $s \circ r_D \circ s^{-1}$ admet le même spectre que r_D et D' est espace propre pour la valeur propre 1, c'est donc le retournement d'axe D' qui est dans H par hypothèse.

□

Démonstration. (*théorème*) : Considérons H un sous-groupe distingué et non trivial de $SO(3)$. Soit $h \in H \setminus \{I_3\}$. On définit :

$$\begin{array}{rccl}
\phi : & SO(3) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& g & \longmapsto & tr(g \circ h \circ g^{-1} \circ h^{-1})
\end{array}$$

Remarquons que la trace d'un élément $r \in SO(3)$ est de la forme $tr(r) = 1 + 2\cos(\theta)$ où $\theta \in [-\pi, \pi[$ est égal à l'angle de la rotation r. Comme le groupe $SO(3)$ est connexe, compact et contient l'identité, son image par ϕ est de la forme $[a, 3]$, où $a \leq 3$. Mais $a < 3$. En effet, si $a = 3$, alors $\theta = 0$. Donc $h \in Z(SO(3)) = \{I_3\}$ ce qui est une contradiction avec l'hypothèse sur h. Remarquons que 3 est la limite croissante de la suite $\left(\left(1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Donc on dispose d'un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a < 1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) < 3$. Soit $g_n \in SO(3)$ tel que $\phi(g_n) = 1+2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$, ce qui implique que $h_n := g_n \circ h \circ g_n^{-1} \circ h^{-1} \in H$ est une rotation de trace $1+2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$, et donc d'angle $\pm\frac{\pi}{n}$. Ainsi, h_n^n est une rotation d'angle π de H, donc un retournement de H. $\square$

Remarques :

- Le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ est abélien.
- Si $n \geq 3$ est impair, $SO_n(\mathbb{R})$ est simple.
- Si $n \geq 4$ est pair, $SO_n(\mathbb{R})$ n'est pas simple. En particulier $Z(SO_n(\mathbb{R})) = \{Id_n, -Id_n\}$ est distingué.