

Séries de FOURIER des applications continues.

ÉNONCÉ :

$\mathcal{C}_{2\pi}$ désigne l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continues et 2π -périodiques. $(\mathcal{C}_{2\pi}, ||\cdot||_\infty)$ est un espace de BANACH.

$c_k(f)$ désigne le coefficient de FOURIER d'indice k de f . $S_n(f)$ désigne la somme partielle symétrique d'indice n de la série de FOURIER de f :

$$S_n(f) := \sum_{k=-n}^n c_k(f) \exp(ik.)$$

1. Pour tout élément $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe un $\mathcal{G}_\delta$ dense D de $(\mathcal{C}_{2\pi}, ||\cdot||_\infty)$, tel que pour tout élément $f \in D$, on a :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(f)(x_0)| = +\infty$$

2. Il existe un $\mathcal{G}_\delta$ dense Δ de $(\mathcal{C}_{2\pi}, ||\cdot||_\infty)$, tel que pour tout élément $f \in \Delta$, l'ensemble :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(f)(x)| = +\infty\}$$

soit un $\mathcal{G}_\delta$ dense de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

DÉVELOPPEMENT :

1. Pour tout élément $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout élément

$x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) &= \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \exp(-ikt) dt \exp(ikx) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x-t) dt \\ &= S_n(f(x-.))(0) \end{aligned}$$

où le noyau de Dirichlet d'indice n est défini par :

$$D_n = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \exp(ik.) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin((n + \frac{1}{2}).)}{\sin(\frac{.}{2})}$$

Or l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{2\pi} &\longrightarrow \mathcal{C}_{2\pi} \\ f &\longmapsto f(x-.) \end{aligned}$$

étant un homéomorphisme, elle transforme un $\mathcal{G}_\delta$ en un $\mathcal{G}_\delta$. Ainsi, il suffit de prouver le résultat pour $x_0 = 0$.

On considère la famille de formes linéaires $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\begin{aligned} T_n : \mathcal{C}_{2\pi} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto S_n(f)(0) \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, par parité de D_n , on a :

$$\begin{aligned} |T_n(f)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} D_n(-t) f(t) dt \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} |D_n(t)| |f(t)| dt \\ &\leq ||D_n||_{L^1} ||f||_\infty \end{aligned}$$

Donc $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille d'applications linéaires continues sur $(\mathcal{C}_{2\pi}, ||\cdot||_\infty)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $||T_n||_{\mathcal{L}_c} \leq ||D_n||_{L^1}$.

Voyons qu'il s'agit d'une égalité. Pour $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f_\epsilon = \frac{D_n}{|D_n| + \epsilon} \in B(0, 1)$. Alors on a :

$$\begin{aligned} T_n(f_\epsilon) &= \int_0^{2\pi} \frac{D_n(t)^2}{|D_n(t)| + \epsilon} dt \geq \int_0^{2\pi} \frac{D_n(t)^2 - \epsilon^2}{|D_n(t)| + \epsilon} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (|D_n(t)| - \epsilon) dt \\ &= \int_0^{2\pi} |D_n(t)| - 2\pi\epsilon \end{aligned}$$

$\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ étant arbitraire, on a finalement $\|T_n\|_{\mathcal{L}_c} \geq \|D_n\|_{L^1}$. Par le THÉORÈME DE BANACH-STEINHAUS, on a deux possibilités :
— La famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.
— Il existe un $\mathcal{G}_\delta$ dense D du BANACH $(\mathcal{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ tel que pour tout $f \in D$:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(f)(x_0)| = +\infty$$

Or, $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas bornée car :

$$\begin{aligned} \|T_n\|_{\mathcal{L}_c} &= \|D_n\|_{L^1} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{|\sin((n + \frac{1}{2})t)|}{|\sin(\frac{t}{2})|} dt \\ &\geq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{|\sin((n + \frac{1}{2})t)|}{|\frac{t}{2}|} dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin(u)|}{u} du \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \end{aligned}$$

D'où le résultat du premier point.

2. Soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite dense de $[-\pi, \pi[$. Par le premier point, on dispose pour tout $k \in \mathbb{N}$ d'un $\mathcal{G}_\delta$ dense D_k de $\mathcal{C}_{2\pi}$ tel que pour

tout $f \in D_k : \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(f)(x_k)| = +\infty$. Posons $\Delta = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} D_k$. Remarquons que Δ est un $\mathcal{G}_\delta$ par le THÉORÈME DE BAIRE.

De plus, pour tout élément $f \in \Delta$ et tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(f)(x_k)| = +\infty$$

Soit $f \in \Delta$. On a les égalités :

$$\begin{aligned} &\{x \in \mathbb{R} \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(f)(x)| = +\infty\} \\ &= \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R} \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(f)(x)| > p\} \\ &= \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R} \mid |S_n(f)(x)| > p\} \right) \end{aligned}$$

Mais pour $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid |S_n(f)(x)| > p\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ par continuité de $S_n(f)$. Ainsi,

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(f)(x)| = +\infty\}$$

est un $\mathcal{G}_\delta$ dense dans $[-\pi, \pi[$ car il contient $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ et donc dense dans $\mathbb{R}$ par 2π -périodicité des $S_n(f)$. Ceci achève la preuve du second point

Remarques :

- On admet le fait que la fonction sinus cardinal n'est pas LEBESGUE intégrable : il faut bien entendu savoir le montrer.
- On montre un résultat bien plus fort que : "*il existe un sous-ensemble dense de $\mathcal{C}_{2\pi}$ tel que ...* "
- Les théorèmes de BAIRE et de BANACH-STEINHAUS sont à maîtriser ainsi que leur preuve.