Théorème de RIESZ-FISHER

[GARET-KURTZMANN, p 213]

ÉNONCÉ :

Théorème :
Pour $p \in [1, +\infty]$, $(L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu), ||.||_p)$ est un espace de Banach.

DÉVELOPPEMENT :

- **Cas où** $p = +\infty$: Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de L^∞. Soit g_n un représentant de f_n. On pose :

$$B := \bigcup_{n\geq 1} \{\omega \in \Omega \mid |g(\omega)| > ||g_n||_{\infty,ess}\}$$

$$\bigcup \bigcup_{n\geq 1, p\geq 1} \{\omega \in \Omega \mid |g_n(\omega) - g_p(\omega)| > ||g_n - g_p||_{\infty,ess}\}$$

  On a clairement $\mu(B) = 0$ car B est réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle par μ.
  Posons $G = \Omega \setminus B$.
  La suite de fonction $(g_n 1_G)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans l'espace des fonctions bornées sur Ω muni de la norme infinie. Ce dernier étant complet, la suite converge vers une fonction g, qui est mesurable comme limite ponctuelle de fonctions mesurables. Notons f la classe de g. On a alors l'inégalité :

$$||f_n - f||_{\infty,ess} = ||g_n 1_G - g||_{\infty,ess} \leq ||g_n 1_G - g||_\infty$$

  d'où $f_n \xrightarrow{L^\infty} f$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

- **Cas où** $p \in [1, +\infty[$:

LEMME : Un espace vectoriel normé où toute série absolument convergente converge est complet.

Démonstration. Soit $(E, ||.||)$ est un espace vectoriel normé vérifiant l'hypothèse du lemme. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E. On pose $n_0 = 1$ et, pour $k \geq 1$,

$$n_k = \inf\{n > n_{k-1} \mid (i, i' \geq n) \Longrightarrow (||x_i - x_{i'}|| \leq 2^{-k})\}$$

Remarquons que cette suite d'indices est strictement croissante et bien définie car $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
La série de terme général $x_{n_k} - x_{n_{k+1}}$ est absolument convergente, donc convergente par hypothèse. La suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est donc convergente. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite de Cauchy qui admet une sous-suite convergente : elle est donc convergente. □

LEMME : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L^p telle que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ||f_n||_p < +\infty$$

Alors la suite $(\sum_{k=1}^n f_k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans L^p.

Démonstration. Notons g_n un représentant de f_n.

- Supposons que les g_k soient positives : On considère la suite de fonctions $S_n = \sum_{k=1}^n g_k$. Elle converge simplement vers une fonction g mesurable (éventuellement infinie en certains points).
  Par inégalité triangulaire, on a :

$$\int_\Omega S_n^p d\mu \leq \left(\sum_{k=1}^n ||g_k||_p\right)^p$$

Puis, par le théorème de BEPPO LEVI, on a :

$$\int_\Omega g^p d\mu \leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} ||g_k||_p\right)^p < +\infty$$

D'où $g \in L^p$.
Soient $n, n' \in \mathbb{N}$ tels que $n' \geq n$. On a :

$$(S_{n'} - S_n)^p = \left(\sum_{k=n+1}^{n'} g_k\right)^p$$

De nouveau, par BEPPO LEVI, il vient :

$$\lim_{n' \longrightarrow +\infty} \int_\Omega (S_{n'} - S_n)^p d\mu = \int_\Omega (g - S_n)^p d\mu$$

Autrement dit,

$$||g - S_n||_p = \lim_{n' \longrightarrow +\infty} ||S_{n'} - S_n||_p$$

De nouveau, par inégalité triangulaire, on a :

$$||S_{n'} - S_n||_p \leq \sum_{k=n+1}^{n'} ||g_k||_p \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} ||g_k||_p$$

d'où :

$$||g - S_n||_p \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} ||g_k||_p \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc $||g - S_n||_p \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

- Supposons que les g_k soient quelconques :
  On écrit $g_k = g_k^+ + g_k^-$. On définit ainsi $g^+ = \sum g_k^+$, $g^- = \sum g_k^-$, $S_n^+ = \sum_{k=1}^n g_k^+$ et $S_n^- = \sum_{k=1}^n g_k^-$.
  La série de terme général $||g_k^+||_p$ est convergente car $||g_k^+||_p \leq ||g_k||_p$.
  On montre ainsi que $||S_n^+ - g^+||_p$ et $||S_n^- - g^-||_p$ tendent bien vers 0. Par inégalité triangulaire, on a finalement :

  $$||g - S_n||_p \leq ||g^+ - S_n^+||_p + ||g^- - S_n^-||_p \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

  D'où la convergence de la suite $(\sum_{k=1}^n f_k)_{n \in \mathbb{N}}$ dans L^p.

□

Remarques :

- L'espace mesuré considéré est quelconque : ceci marche donc pour la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ également en particulier.
- Il faut savoir remontrer le théorème de BEPPO LEVI, utilisé ici à 2 reprises.
- Il faut être en mesure de montrer que de toute suite convergente de L^p, on peut en extraire une sous-suite qui converge presque-partout.