

Réduction de JORDAN

ÉNONCÉ :

Théorème : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme caractéristique scindé. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ses valeurs propres. Il existe des entiers $d_{j,1} \geq \dots \geq d_{j,\ell_j}$ pour $j \in \{1, \dots, r\}$ tels que dans une certaine base β de E , $M_\beta(f)$ soit diagonale par blocs avec les blocs

$$(B_{j,k})_{\substack{1 \leq j \leq r \\ 1 \leq k \leq \ell_j}}$$

où $B_{j,k} = \lambda_j I_{d_{j,k}} + J_{d_{j,k}}$, en notant J_d la matrice de JORDAN définie par :

$$J_d = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$$

DÉVELOPPEMENT :

LEMME : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice q . Alors pour tout $x \in E$ tel que $f^{q-1}(x) \neq 0$ l'espace $E_{f,x} := \text{Vect}(\{x, f(x), \dots, f^{q-1}(x)\})$ est f -stable, de dimension q .

Démonstration. Il suffit de remarquer que, par nilpotence de f , $E_{f,x} = \mathbb{K}[f](x)$. Ainsi, il s'agit d'un sous-espace vectoriel de dimension q et f -stable par nilpotence de f . $\square$

LEMME : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Il existe des entiers $d_1 \geq \dots \geq d_\ell$ tels que dans une certaine base β de E , $M_\beta(f)$ soit diagonale par blocs avec les blocs $(J_{d_k})_{1 \leq k \leq \ell}$.

Démonstration. Montrons le lemme par récurrence forte sur $\dim(E) = n$.

- Pour $n = 1$, c'est évident.
- Soit $n \geq 2$ et supposons le résultat faire pour toute dimension inférieure à n .

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice q . On peut supposer $2 \leq q \leq n$, car si $q = 1$, f est nul et si $q = n$, prenant $x \in E$ satisfaisant le lemme, on a $E_{f,x} = E$ et la matrice de f relativement à la base $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est J_n .

Donnons-nous alors $x \in E$ tel que $f^{q-1}(x) \neq 0$, $2 \leq q \leq n - 1$. En notant $(e_1, e_2, \dots, e_q) = (x, f(x), \dots, f^{q-1}(x))$ que l'on complète en une base $(e_1, \dots, e_q, e_{q+1}, \dots, e_n)$ de E . Considérons le sous-espace vectoriel F défini par :

$$F = \{y \in E \mid \forall j \in \mathbb{N}, e_q^* \circ f^j(y) = 0\} = \bigcap_{j < q} \ker(e_q^* \circ f^j)$$

F est, par définition, de dimension au moins égale à $n - q$ et f -stable.

Voyons que $F \cap E_{f,x} = \{0\}$. Soit $y = \sum_{j=1}^{q-1} \lambda_j f^j(x) \in F \cap E_{f,x}$. Alors on a :

$$0 = e_q^*(y) = \lambda_{q-1}$$

Puis $0 = e_q^*(f(y)) = \lambda_{q-2}$ et ainsi de suite jusqu'à $0 = e_q^*(f^{q-1}(y)) = \lambda_1$. Ainsi, $y = 0$ et donc $F \cap E_{f,x} = \{0\}$. Ceci implique $\dim(F) \leq n - q$ et donc $\dim(F) = n - q$.

On a ainsi la décomposition en sous-espaces stables de E :

$$E = E_{f,x} \oplus F$$

Comme la matrice de $f|_{E_{f,x}}$ dans la base $(x, f(x), \dots, f^{q-1}(x))$ est J_q et qu'en appliquant l'hypothèse de récurrence à $f|_F$, on obtient le résultat en concaténant les bases trouvées des deux sous-espaces vectoriels supplémentaires, d'où le résultat par récurrence.

□

Démonstration. En notant $\chi_f(X) = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$, on a par le lemme des noyaux couplé au théorème de CAYLEY-HAMILTON : $E = \bigoplus_{k=1}^r \ker(f - \lambda_k)^{\alpha_k}$ qui est une décomposition en sous-espaces f -stables de E .

En notant, pour $k \in \{1, \dots, r\}$, $N_k := \ker(f - \lambda_k)^{\alpha_k}$, on applique le lemme précédent à la famille d'endomorphismes nilpotents $(f_{N_k} - \lambda_k Id_{N_k})_{1 \leq k \leq r}$. On obtient la décomposition souhaitée en concaténant les bases $(B_k)_{1 \leq k \leq r}$ trouvées.

□

Remarques :

- Le premier lemme est survolé pour se concentrer sur le reste de la preuve. Il faut néanmoins savoir justifier les détails.
- Cette preuve via la dualité n'est pas "constructive" : il faut savoir réaliser une réduite de JORDAN d'un endomorphisme quelconque à polynôme caractéristique scindé.
- Dans la réduite de JORDAN d'un endomorphisme, on a :
 - (a) La taille du plus grand bloc associé à une valeur propre λ est égal à la multiplicité algébrique de λ dans le polynôme minimal.

- (b) Le nombre de blocs associés à une valeur propre λ est égal à la dimension du sous-espace propre (multiplicité géométrique) de E_λ .
- (c) La somme des tailles des blocs associés à une valeur propre λ est égal à la multiplicité algébrique de λ du polynôme caractéristique.
- La connaissance de la réduite de JORDAN et d'une de ses matrices de passage nous donne la décomposition de DUNFORD.