

Projection sur un convexe fermé, théorème de RIESZ-FRÉCHET

ÉNONCÉ :

Théorème : Soit C un convexe fermé non vide d'un espace de HILBERT H . Alors :

$$\forall x \in H, \exists ! p_C(x) \in C \quad \|x - p\| = d(x, C)$$

De plus, $p_C(x)$ est l'unique élément de C satisfaisant $\forall c \in C$, $\Re(\langle x - p_C(x), c - p_C(x) \rangle) \leq 0$.

Corollaire : Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H . Alors $H = F \oplus F^\perp$.

Théorème : Soit H un espace de HILBERT et soit φ une forme linéaire continue sur H . Alors il existe un unique $x_\varphi \in H$ tel que :

$$\forall x \in H, \quad \varphi(x) = \langle x_\varphi, x \rangle$$

DÉVELOPPEMENT :

- Théorème de projection :

Soit $x \in H$ et notons $d = d(x, C)$.

- Existence : Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de C telle que $d_n = \|x - c_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d$.

Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \|c_p - c_q\|^2 &= \|(c_p - x) - (c_q - x)\|^2 \\ &= 2(d_p^2 + d_q^2) - \|(c_p - x) + (c_q - x)\|^2 \\ &= 2(d_p^2 + d_q^2) - 4 \left\| \frac{c_p + c_q}{2} - x \right\|^2 \\ &\leq 2(d_p^2 + d_q^2) - 4d^2 \xrightarrow{p, q \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

On a ainsi montré que $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de CAUCHY. Ainsi, par complétude de H , elle converge vers un élément $p_C(x) \in C$ vérifiant $\|x - p_C(x)\| = d$.

- Unicité : Soient $p_1, p_2 \in C$ tels que $\|x - p_1\| = \|x - p_2\| = d(x, C)$.

Alors on a :

$$\begin{aligned} \|p_1 - p_2\|^2 &= \|(p_1 - x) - (p_2 - x)\|^2 \\ &= 4d^2 - \|(p_1 - x) + (p_2 - x)\|^2 \\ &= 4d^2 - 4 \left\| \frac{p_1 + p_2}{2} - x \right\|^2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

D'où $p_1 = p_2$.

- Caractérisation : Soient $a, c \in C$, $t \in]0, 1]$. Par convexité de C , $(1 - t)a + tc \in C$. Alors on a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} \forall t \in]0, 1], \forall c \in C, \quad \|x - ((1 - t)a + tc)\|^2 &\geq \|x - a\|^2 \\ \iff \forall t \in]0, 1], \forall c \in C, \quad \Re(\langle x - a, c - a \rangle) &\leq \frac{t}{2} \|c - a\|^2 \end{aligned}$$

Reste à prendre $a = p_C(x)$ et $t \rightarrow 0$ et on a bien, pour tout $c \in C$, $\Re(\langle x - p, c - p \rangle) \leq 0$.

Réciproquement, si a satisfait $\Re(\langle x-a, c-a \rangle) \leq 0$, on prend $a = p_C(x)$, $t = 1$ et on a, pour tout $c \in C$, $\|x-a\| \leq \|x-c\|$.

- Corollaire : Soit $x \in F$. Il suffit de remarquer que, par le point précédent, pour tout $c \in F$, $\langle x-p, c \rangle = 0$. Ainsi on a :

$$x = \underbrace{(x-p)}_{\in F^\perp} + \underbrace{p}_{\in F}$$

donc $H = F \oplus F^\perp$.

- Théorème de RIESZ-FRÉCHET :
 - Existence : Soit $\varphi \in H'$. Si $\varphi = 0$, alors $v = 0$ convient. Si φ n'est pas identiquement nul, posons $E = \text{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\})$ qui est un sous-espace vectoriel fermé. Pour $y \in H$, notons $p_M(y) \in M$ sa projection. On a $x_0 = \frac{y-p_M(y)}{\|y-p_M(y)\|} \in M^\perp$. Comme pour tout $x \in H$, on a $x\varphi(x_0) - \varphi(x)x_0 \in M$, il vient :
$$0 = \langle x_0, x\varphi(x_0) - \varphi(x)x_0 \rangle = \langle \varphi(x_0)x_0, x \rangle - \varphi(x)$$
d'où le résultat, en posant $x_\varphi = \varphi(x_0)x_0$.
 - Unicité : Soient $v_1, v_2 \in H$ tels que $\varphi = \langle \cdot, v_1 \rangle = \langle \cdot, v_2 \rangle$. Alors, pour tout $x \in H$, $\langle x, v_1 \rangle = \langle x, v_2 \rangle$. Par bilinéarité du produit scalaire, on a $\langle x, v_1 - v_2 \rangle = 0$. En particulier, pour $x = v_1 - v_2 \in H$, on a $\|v_1 - v_2\|^2 = 0$ donc $v_1 = v_2$.

Remarques :

- On pourra schématiser la caractérisation angulaire et voir ce qu'il se passe dans le cas non convexe.
- On a en particulier une isométrie semi-linéaire surjective de H sur son dual topologique.

- Il faut connaître l'une de ces nombreuses applications (existence d'un adjoint dans un espace de HILBERT, caractérisation de la densité, etc.).