PERRON-FROBENIUS

ÉNONCÉ :

Théorème :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement positive. Alors $\rho(A)$ est l'unique valeur propre de A de module maximum. De plus, le sous-espace propre associé à la valeur propre $\rho(A)$ noté $E_{\rho(A)}$ est une droite vectorielle (*i.e.*, $\dim(E_{\rho(A)} = 1)$ engendrée par un vecteur strictement positif.
Enfin, $\rho(A)$ est une valeur propre simple de A.

DÉVELOPPEMENT :

LEMME :
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement positive et $x \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre de A associé à une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $|\lambda| = \rho(A)$. Alors $\rho(A)$ est une valeur propre de A de vecteur propre associé $|x| > 0$. De plus, il existe un réel θ tel que $x = |x|\exp(i\theta)$.

Démonstration. De $Ax = \lambda x$, on a $\rho(A)x = |Ax| \leq |A||x| = A|x|$ (car $A > 0$). On considère $y := A|x| - \rho(A)|x|$. On a $y \geq 0$. Supposons par l'absurde que $y \neq 0$. Alors $Ay > 0$. En notant $x' = A|x|$, l'inégalité $Ay > 0$ se réécrit $Ax' > \rho(A)x'$ donc $\rho(A) > \rho(A)$ ce qui est absurde. Donc $y = 0$, *i.e.*, $A|x| = \rho(A)|x|$. On a donc $|x| = \frac{A}{\rho(A)}|x| > 0$.
De l'égalité $|Ax| = A|x|$, on a, pour tout $p \in \{1, \dots, n\}$, $|\sum_{k=1}^n a_{p,k}x_k| = \sum_{k=1}^n a_{p,k}|x_k|$ où $((a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n})) = A$. En fixant p, la suite de nombres complexes $(z_k)_{1\leq k\leq n} = (a_{p,k}x_k)_{1\leq k\leq n}$ est telle que $|\sum_{k=1}^n z_k| = \sum_{k=1}^n |z_k|$. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, il existe $\theta_k \in]-\pi, \pi]$ tel que $z_k = |z_k|\exp(i\theta_k)$. On a donc :

$$\begin{cases} \left|\sum_{k=1}^n z_k\right|^2 = \sum_{k=1}^n |z_k|^2 + 2\sum_{j\neq j} |z_k||z_j|\cos(\theta_j - \theta_k) \\ \left(\sum_{k=1}^n |z_k|\right)^2 = \sum_{k=1}^n |z_k|^2 + 2\sum_{k\neq j} |z_j||z_k| \end{cases}$$

et l'égalité $|\sum_{k=1}^n z_k| = \sum_{k=1}^n |z_k|$ équivaut à

$$\sum_{j\neq k} |z_j||z_k|(1 - \cos(\theta_j - \theta_k) = 0$$

Tous les termes de cette somme étant positifs et $|z_j||z_k| > 0$, on en déduit que $\cos(\theta_j - \theta_k) = 1$ pour $j \neq k$ avec $-2\pi < \theta_j - \theta_j < 2\pi$ donc $\theta_j = \theta_k$. En notant θ cette valeur commune, on a donc $x = |x|\exp(i\theta)$. □

Démonstration. (*théorème*) : Soit $x \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre unitaire de A de valeur propre associé λ telle que $|\lambda| = \rho(A)$. Alors :

$$\lambda x = Ax = A|x|\exp(i\theta) = \rho(A)|x|\exp(i\theta) = \rho(A)x$$

Comme $x \neq 0$, on a $\lambda = \rho(A)$.
Supposons par l'absurde que $\dim(E_{\rho(A)}) > 1$. Soient $x, y \in E_{\rho(A)}$ linéairement indépendants. Alors $z := x_1y + y_1x \in E_{\rho(A)}$ avec $z_1 = 0$. C'est une contradiction par le lemme. Donc $\dim(E_{\rho(A)}) = 1$.
Si $n = 1$, il est évident que $\rho(A)$ est simple.
Soit $n \geq 2$, et supposons que la multiplicité de $\rho(A)$, notée m, soit supérieure à 2. Soit $x > 0$ un générateur de $E_{\rho(A)}$. Il existe $y \in \mathbb{C}^n$ tel que $Ay = x + \rho(A)y$. Comme A et x sont réels, on a également $A\overline{y} = x + \rho(A)\overline{y}$, d'où $Az = x + \rho(A)z$ avec $z = \frac{1}{2}(y + \overline{y})$. Comme

$x > 0$, on dispose d'un $\alpha > 0$ tel que $v := z + \alpha x$. Ainsi, on a :

$$Av = x + \rho(A)v > \rho(v) \Longrightarrow \rho(A) > \rho(A)$$

C'est de nouveau une contradiction. D'où la simplicité de $\rho(A)$. $\square$