Lemme de MORSE

[ROUVIÈRE, p 354]

ÉNONCÉ :

Lemme : Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant $0_{\mathbb{R}^n}$. On suppose que $df(0) = 0$ et $d^2 f(0)$ est non dégénérée, de signature $(p, n-p)$.
Alors il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme φ entre deux voisinages de l'origine de $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = \varphi_1(x)^2 + \ldots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \ldots - \varphi_n(x)^2$ au voisinage de 0.

DÉVELOPPEMENT : f est $\mathcal{C}^3$ donc la formule de TAYLOR avec reste intégral donne pour $x \in U$:

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \int_0^1 (1-t) d^2 f(tx)(x,x) dt \\ &= x^T \int_0^1 (1-t) d^2 f(tx) dt x \\ &= x^T Q(x) x \end{aligned}$$

où Q est $\mathcal{C}^1$ (par dérivation sous le signe intégral) et $Q(0) = \frac{1}{2} D^2 f(0)$ est symétrique inversible de signature $(p, n-p)$.

LEMME : Soit $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $V \in \mathcal{V}(A_0) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^1(V, GL_n(\mathbb{R}))$ telle que pour tout $A \in V$, $A = g(A)^T A_0 g(A)$.

Démonstration. Soit $\varphi : \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$, $M \longmapsto M^T A_0 M$. On a que φ est différentiable et pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$d\varphi(M)(H) = H^T A_0 M + M^T A_0 H$$

En particulier, $d\varphi(I_n)(H) = H^T A_0 + A_0 H = (A_0 H)^T + A_0 H$. On a donc $\ker(d\varphi(I_n)) = A_0^{-1} \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. De plus, $d\varphi(I_n)$ est surjective dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ puisque pour tout $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $d\varphi(I_n)\left(\frac{1}{2} A_0^{-1} A\right) = A$.
Posons $F := A_0^{-1} \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors on a $F \oplus \ker(d\varphi(I_n)) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $I_n \in F$.
En considérant $\psi = \varphi_{|F}$, on a que $d\psi(I_n)$ est bijective. Ainsi, par le théorème d'inversion locale, ψ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local d'un voisinage W de I_n dans $GL_n(\mathbb{R})$ sur un voisinage V de $A_0 = \psi(I_n)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Pour $A \in V$, il existe donc une unique matrice inversible $M \in W$ telle que $A = M^T A_0 M$. On a que $M = \psi^{-1}(A)$, et donc $g = \psi^{-1}$ convient, d'où le résultat. □

Démonstration. Comme $Q(0) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, par le lemme, si $M(x) = g(Q(x))$, on a $Q(x) = (M(x))^T Q(0) M(x)$ au voisinage de 0, et donc $f(x) - f(0) = y^T Q(0) y$ où $y = M(x) x$.
Comme $Q(0) = \frac{1}{2} D^2 f(0)$ est de signature $(p, n-p)$, par classification des formes quadratiques, il existe une matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A^T Q(0) A = diag(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1)$ et le changement linéaire de coordonnées $y = Au$ donne alors :

$$y^T Q(0) y = u^T A^T Q(0) A u = u_1^2 + \ldots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \ldots - u_n^2$$

Ainsi, en posant $\varphi : x \longmapsto A^{-1} M(x) x$, on a que φ est $\mathcal{C}^1$ et de plus :

$$d\varphi(0)(h) = A^{-1}(dM(0)(h) \times 0 + M(0) \times h) = A^{-1} M(0)(h)$$

Donc $d\varphi(0) = A^{-1} M(0)$ est inversible.
En vertu du théorème d'inversion locale, on a que φ est un $\mathcal{C}^1$-

difféomorphisme local entre deux voisinages de 0 car $\varphi(0) = 0$, ce qui conclut car on a, dans ce voisinage de 0 :

$$f(x) - f(0) = \varphi_1(x)^2 + \ldots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \ldots - \varphi_n(x)^2$$

$\square$

Remarques :

- On utilise à deux reprises le théorème d'inversion local : il faut en connaître précisément son énoncé.
- La formule de TAYLOR avec reste intégral généralisée doit être maîtrisée.
- Si f n'est pas de classe $\mathcal{C}^3$, φ n'est plus nécessairement un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.
- Une application : le folium de DESCARTES défini par $\mathcal{C} = F^{-1}(\{0\})$ où $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x, y) \mapsto 3xy - x^3 - y^3$ qui est une submersion en chaque point de $\mathcal{C}$ hormis $(0, 0)$. Détaillons cela. Le lemme de MORSE appliqué à F en 0 fournit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\varphi : U \to V$, U, V deux vosinages de 0 tel que $\varphi(0) = 0$ et $F(x) = G(\varphi(x))$ pour tout $x \in U$, où $G(x, y) = 3xy$. Ainsi, on a $[F = 0] \cup U = \varphi^{-1}([G = 0] \cup V)$, et on a donc localement une union de deux courbes qui se croisent, à savoir la ligne de niveau $[G = 0]$ qui est $[x = 0] \cup [y = 0]$.