

Injectivité de la transformée de FOURIER

ÉNONCÉ :

Théorème : L'application, appelée transformation de FOURIER, définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) &\longrightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \\ f &\longmapsto \mathcal{F}(f) \end{aligned}$$

est une application linéaire injective.

DÉVELOPPEMENT :

LEMME (Invariance du noyau de Gauss) : Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, on définit l'application, appelée noyau de Gauss, définie par :

$$q_t(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{|x|^2}{2t}} \in L^1(\mathbb{R}^d)$$

où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$. Alors on a :

$$\mathcal{F}(q_t)(\xi) = e^{-\frac{t|\xi|^2}{2}}$$

Démonstration. On montre le résultat pour $d = 1$ par soucis de notations.

On a :

$$\mathcal{F}(q)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\frac{x^2}{2} + ix\xi\right)} dx$$

Or $\left(\frac{x^2}{2} + ix\xi\right) = \frac{1}{2} (x^2 + i2x\xi) = \frac{1}{2} ((x + i\xi)^2) + \xi^2$.

D'où :

$$\mathcal{F}(q)(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2} dx \quad (\star)$$

On considère l'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto e^{-\frac{1}{2}z^2} \end{aligned}$$

Pour $R > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$ fixés, notons $\Gamma(R)$ le rectangle de sommets $-R, R, R + i\xi, -R + i\xi$, parcouru dans le sens direct. On a alors :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma(R)} \phi(z) dz &= \underbrace{\int_{-R}^R e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{I_1(R)} + \underbrace{\int_0^\xi e^{-\frac{1}{2}(R+it)^2} i dt}_{I_2(R)} \\ &\quad - \underbrace{\int_{-R}^R e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2} dx}_{I_3(R)} - \underbrace{\int_0^\xi e^{-\frac{1}{2}(-R+it)^2} i dt}_{I_4(R)} \end{aligned}$$

Or $\lim_{R \rightarrow +\infty} I_1(R) = \sqrt{2\pi}$. De plus,

$$|I_2(R)| \leq \int_0^\xi e^{-\frac{1}{2}(R^2-t^2)} dt = e^{-\frac{R^2}{2}} \int_0^\xi e^{\frac{t^2}{2}} dt$$

d'où $\lim_{R \rightarrow +\infty} I_2(R) = 0$. De façon analogue, $\lim_{R \rightarrow +\infty} I_4(R) = 0$. L'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2} dx$ étant convergente, on a :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} I_3(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+ix\xi)^2} dx$$

ϕ étant holomorphe sur $\mathbb{C}$ et $\Gamma(R)$ étant fermé, en vertu du théorème de CAUCHY, on a :

$$\int_{\Gamma(R)} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0$$

Ainsi, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+ix\xi)^2} dx = \sqrt{2\pi}$$

Finalement, on obtient par la relation $(\star)$:

$$\mathcal{F}(q)(\xi) = e^{\frac{-\xi^2}{2}}$$

Or $\mathcal{F}(q_t)(\xi) = \mathcal{F}(q)(\sqrt{t}\xi)$ par changement de variables, d'où $\mathcal{F}(q_t)(\xi) = e^{\frac{-t\xi^2}{2}}$. $\square$

Démonstration. (théorème) : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

- L'application est bien définie. En effet, $\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}$. Par le théorème de continuité de LEBESGUE d'une intégrale à paramètres, $\mathcal{F}(f)$ est continue.

Voyons que $\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) = 0$. Soit $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$. Supposons, sans perte de généralité, que $|\xi_1| \rightarrow +\infty$. On pose $a = (\frac{\pi}{\xi_1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d$. On a, par changement de variables,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-a) e^{-i\langle x-a, \xi \rangle} dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^d} \tau_a f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx \end{aligned}$$

D'où

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (f(x) - \tau_a f(x)) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx$$

Finalement, on a :

$$|\mathcal{F}(f)(\xi)| = \frac{1}{2} \|f - \tau_a\|_{L^1}$$

qui tend vers 0 lorsque $a \rightarrow 0$, par continuité de l'application $\tau : a \mapsto \tau_a$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ donc lorsque $|\xi| \rightarrow +\infty$.

On a donc bien que $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

- La linéarité de l'application est évidente par linéarité de l'intégrale sur $\mathbb{R}^d$.

- L'application est injective. En effet, soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\mathcal{F}(f) = 0$. L'application étant linéaire, il suffit de voir que $f = 0$. On définit, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, pour $a \in \mathbb{R}^d$ fixé, $g_t(x) = q_t(x) e^{i\langle a, x \rangle}$. On a d'une part :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mathcal{F}(g_t)(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mathcal{F}(q_t)(x-a) dx \\ &= f * \mathcal{F}(q_t)(a) \\ &= \sqrt{2\pi t}^d f * q_{t^{-1}}(a) \end{aligned}$$

D'autre part, par la formule de dualité,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mathcal{F}(g_t)(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(f)(x) g_t(x) dx = 0$$

D'où, pour tout $(t, a) \in (\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}^d)$, $f * q_{t^{-1}}(a) = 0$.

Mais comme $(q_{t^{-1}})_{t>0}$ est une approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, on a, par continuité de la norme :

$$0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|f * q_{t^{-1}} - f\|_1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|f\|_1 = \|f\|_1$$

D'où $f = 0$. $\square$

Remarques :

- On pourra ne montrer que le lemme + l'injectivité en admettant le reste (qu'il faut savoir montrer).
- Il faut connaître des applications immédiates de ce théorème (solutions d'une équation de convolution, etc.)
- L'application n'est pas surjective mais $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^d))$ est dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ (difficile).