

# Inégalité de Hoeffding

[BERNIS, p ]

## ÉNONCÉ :

**Théorème :** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, centrées et bornées presque-sûrement, *i.e.* :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists c_n > 0, \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid |X_n(\omega)| \leq c_n\}) = 1$$

Alors en notant, pour  $n \geq 1$ ,  $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$ , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \epsilon > 0, \mathbb{P}(|S_n| > \epsilon) \leq 2 \exp \left( -\frac{\epsilon^2}{2 \sum_{j=1}^n c_j^2} \right)$$

**Application :** Soit  $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{j=1}^n c_j^2 \leq n^{2\alpha-\beta}$$

Alors  $\left(\frac{S_n}{n^\alpha}\right)$  tend presque-sûrement vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

## DÉVELOPPEMENT :

**LEMME :** Soit  $X$  une variable aléatoire bornée par 1 presque-sûrement et centrée. Alors on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{E}[\exp(tX)] \leq \exp \left( \frac{t^2}{2} \right)$$

*Démonstration.* Soient  $t \in \mathbb{R}_+^*$  et  $x \in [-1, 1]$ . On a :

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{1}{2}(1-x) \leq 1 \\ 0 \leq \frac{1}{2}(1+x) \leq 1 \\ \frac{1}{2}(1-x) + \frac{1}{2}(1+x) = 1 \end{cases}$$

De plus,  $xt = \frac{1}{2}(1-x)(-t) + \frac{1}{2}(1+x)t$ .

La fonction  $t \mapsto \exp(tx)$  étant convexe, on a :

$$\exp(tx) \leq \frac{1}{2}(1-x) \exp(-t) + \frac{1}{2}(1+x) \exp(t)$$

$X$  étant presque-sûrement bornée par 1 par hypothèse,  $\exp(tX)$  est bornée presque-sûrement et admet une espérance :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\exp(tX)] &\leq \frac{1}{2} \mathbb{E}[1-X] \exp(-t) + \frac{1}{2} \mathbb{E}[1+X] \exp(t) \\ &= \frac{1}{2} (\exp(-t) + \exp(t)) \quad (\text{car } X \text{ est centrée}) \\ &= ch(t) \end{aligned}$$

Or  $ch(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$  et  $\exp \left( \frac{t^2}{2} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{n! 2^n}$ . Mais comme  $n! 2^n \leq (2n)!$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $ch(t) \leq \exp \left( \frac{t^2}{2} \right)$  d'où  $\mathbb{E}[\exp(tX)] \leq \exp \left( \frac{t^2}{2} \right)$ . □

*Démonstration. (théorème) :* Par hypothèse, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{X_n}{c_n}$  est une variable aléatoire réelle centrée et bornée presque-sûrement par 1. Par le lemme, il vient :

$$\forall t' \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{E} \left[ \exp \left( t' \frac{X_n}{c_n} \right) \right] \leq \exp \left( \frac{t'^2}{2} \right)$$

En posant  $t' = tc_n$ , on a :  $\mathbb{E}[\exp(tX_n)] \leq \exp \left( \frac{t^2}{2} c_n^2 \right)$ .

Ainsi, comme les  $(\exp(tX_n))_{n \in \mathbb{N}}$  sont indépendantes, il vient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\exp(tS_n)] &= \prod_{j=1}^n \mathbb{E}[\exp(tX_j)] \\ &\leq \prod_{j=1}^n \exp\left(\frac{t^2}{2} c_j^2\right) \\ &\leq \exp\left(\frac{t^2}{2} \sum_{j=1}^n c_j^2\right)\end{aligned}$$

Fixons  $\epsilon > 0$ . La fonction  $x \mapsto \exp(tx)$  étant croissante, il est clair que :

$$\{\omega \in \Omega \mid S_n(\omega) > \epsilon\} \subset \{\omega \in \Omega \mid \exp(tS_n(\omega)) > \exp(t\epsilon)\}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n > \epsilon) &\leq \mathbb{P}(\exp(tS_n) > \exp(t\epsilon)) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}[\exp(tS_n)]}{\exp(t\epsilon)} \quad (\text{par l'inégalité de MARKOV}) \\ &\leq \exp\left(\sum_{j=1}^n c_j^2 \frac{t^2}{2} - t\epsilon\right)\end{aligned}$$

Considérons  $a = \sum_{j=1}^n c_j^2$ . La fonction  $t \mapsto \frac{a}{2}t^2 - \epsilon t$  atteint son minimum de valeur  $-\frac{\epsilon^2}{2a}$  au point  $t_0 = \frac{\epsilon}{a} > 0$ . Par stricte croissance de la fonction exponentielle, il vient :

$$\mathbb{P}(S_n > \epsilon) \leq \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{2 \sum_{j=1}^n c_j^2}\right)$$

En remarquant que :

$$\{\omega \in \Omega \mid |S_n(\omega)| > \epsilon\} = \{\omega \in \Omega \mid S_n(\omega) > \epsilon\} \sqcup \{\omega \in \Omega \mid -S_n(\omega) > \epsilon\}$$

On a :

$$\mathbb{P}(|S_n| > \epsilon) \leq 2 \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{2 \sum_{j=1}^n c_j^2}\right)$$

□

*Démonstration. (Application) :* Fixons  $\epsilon > 0$ . En vertu de l'inégalité de Hoeffding, on a :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(|S_n| > n^\alpha \epsilon) &\leq 2 \exp\left(-\frac{n^{2\alpha\epsilon^2}}{2 \sum_{j=1}^n c_j^2}\right) \\ &\leq 2 \exp\left(-\frac{n^\beta \epsilon^2}{2}\right)\end{aligned}$$

Or  $\exp\left(-\frac{n^\beta \epsilon^2}{2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Ainsi par comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général  $\mathbb{P}(|S_n| > n^\alpha \epsilon)$  converge. Par le lemme de BOREL-CANTELLI, on a :

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \omega \in \Omega \mid \left| \frac{S_n(\omega)}{n^\alpha} \right| > \epsilon \right\}\right) = 0$$

En particulier, pour tout  $\epsilon \in \mathbb{Q}_+^*$ ,

$$1 = \mathbb{P}\left(\liminf_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \left| \frac{S_n}{n^\alpha} \right| \leq \epsilon \right\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{m \geq n} \left\{ \left| \frac{S_m}{m^\alpha} \right| \leq \epsilon \right\}\right)$$

i.e.,  $\forall \epsilon \in \mathbb{Q}_+^*$ , on dispose d'un ensemble  $F_\epsilon \in \mathcal{F}$  de mesure pleine tel que pour tout  $\omega \in F_\epsilon$ , il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que, pour tout  $m \geq n$ ,  $\left| \frac{S_m(\omega)}{m^\alpha} \right| \leq \epsilon$ . Soit  $F = \bigcap_{\epsilon \in \mathbb{Q}_+^*} F_\epsilon$  (qui est de mesure pleine par dénombrabilité de  $\mathbb{Q}$ ). Alors :

$$\forall \omega \in F, \quad \forall \epsilon \in \mathbb{Q}_+^*, \quad \exists n \in \mathbb{N}^*, \quad \text{t.q.} \quad \forall m \geq n, \quad \left| \frac{S_m(\omega)}{m^\alpha} \right| \leq \epsilon$$

d'où la convergence presque sûre de  $\frac{S_n}{n^\alpha}$  vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . □