

Inégalité de Hardy

ÉNONCÉ :

Inégalité de Hardy :

Soit $p \in]1, +\infty[$ un réel. Pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, on pose :

$$\begin{aligned} T_f : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \end{aligned}$$

Alors $T_f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ et on a la majoration suivante :

$$\|T_f\|_{L^p} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right) \|f\|_{L^p}$$

De plus, l'inégalité est optimale.

DÉVELOPPEMENT :

Remarquons d'abord que, pour $p \in]1, +\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $T_f(x)$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet, par l'inégalité de HÖLDER, il vient :

$$|T_f(x)| \leq \frac{1}{x} \int_0^x |f(t)| dt \leq x^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p} < +\infty$$

LEMME :

Pour $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}_+^*)$, on a l'inégalité :

$$\|T_f\|_{L^p} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right) \|f\|_{L^p}$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}_+^*)$. On peut prolonger par continuité de façon naturelle f en posant $f(0) = 0$.

— Cas où f est positive : T_f est positif.

En vertu du théorème fondamental de l'analyse, $T_f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$T'_f(x) = \frac{1}{x} (f(x) - T_f(x))$$

d'où :

$$T_f(x) = f(x) - xT'_f(x)$$

Soit $(\epsilon, R) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $\epsilon < R$, alors on a :

$$\int_\epsilon^R T_f^p(x) dx = \underbrace{\int_\epsilon^R T_f^{p-1}(x) f(x) dx}_{=I_1} - \underbrace{\int_\epsilon^R T_f^{p-1}(x) x T'_f(x) dx}_{=I_2}$$

Or, $\frac{1}{p} T_f^p$ et $id_{\mathbb{R}_+^*}$ étant des éléments de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$, on a, en intégrant I_2 par parties :

$$\int_\epsilon^R T_f^p(x) dx = I_1 - \left[\frac{x}{p} T_f^p(x) \right]_\epsilon^R + \frac{1}{p} \int_\epsilon^R T_f^p(x) dx$$

d'où :

$$\left(\frac{p-1}{p}\right) \int_\epsilon^R T_f^p(x) dx = I_1 + \underbrace{\frac{\epsilon T_f^p(\epsilon)}{p}}_{\xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{0}} - \frac{R T_f^p(R)}{p}$$

$$\implies \left(\frac{p-1}{p}\right) \int_0^R T_f^p(x) dx \leq I_1 \quad (\text{par positivité de } T_f)$$

$$\stackrel{(\text{HÖLDER})}{\leq} \left(\int_0^R T_f^p(x) dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_0^R f^p(x) dx \right)$$

D'où, pour $R \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\int_0^R T_f^p(x) dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{+\infty} f^p(x) dx < +\infty$$

T_f^p étant positif, l'inégalité qui précède nous indique que $T_f \in L^p(\mathbb{R}_+)$. Par passage à la limite $R \rightarrow +\infty$, on a l'inégalité souhaitée.

— Cas où f est quelconque : Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $|T_f(x)| \leq T_{|f|}(x)$. On peut ainsi appliquer l'inégalité dans le cas positif à la fonction $|f| \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}_+^*)$. Par croissance de la fonction $x \mapsto x^p$ et de l'intégrale, $T_F \in L^p$ et on a l'inégalité souhaitée.

□

• **Prolongement de l'opérateur T** : Par le lemme, l'opérateur défini par :

$$\begin{array}{ccc} T : (\mathcal{C}_c(\mathbb{R}_+^*), ||.||_{L^p}) & \longrightarrow & (L^p, ||.||_{L^p}) \\ f & \longmapsto & T_f \end{array}$$

est une application linéaire continue (donc uniformément continue) vérifiant l'inégalité :

$$||T||_{\mathcal{L}_c(\mathcal{C}_c(\mathbb{R}_+^*), L^p)} \leq \frac{p}{p-1}$$

De plus, $(L^p(\mathbb{R}_+), ||.||_{L^p})$ est un espace de BANACH dans lequel $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}_+^*)$ est dense.

Par le THÉORÈME DE PROLONGEMENT DES APPLICATIONS UNIFORMÉMENT CONTINUES SUR UN ESPACE COMPLET, il existe une unique application linéaire $\tilde{T} \in \mathcal{L}_c(L^p(\mathbb{R}_+))$ qui prolonge T et vérifie :

$$||\tilde{T}||_{\mathcal{L}_c(L^p)} = ||T||_{\mathcal{L}_c(\mathcal{C}_c(\mathbb{R}_+^*), L^p)} \leq \frac{p}{p-1}$$

• **Prolongement de l'inégalité de Hardy** : Considérons désormais $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$. On dispose d'une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments

de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}_+^*)$ telle que :

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f \text{ dans } L^p(\mathbb{R}_+)$$

Alors :

- D'une part, par HÖLDER, la suite $(T_{f_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers T_f .
- D'autre part, par continuité de $\tilde{T}$, on a , pour $n \in \mathbb{N}$:

$$T_{f_n} = \tilde{T}_{f_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \tilde{T}_f \text{ dans } L^p(\mathbb{R}_+)$$

Donc par le THÉORÈME DE RIESZ-FISCHER, on peut supposer que $(T_{f_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque partout vers $\tilde{T}_f$ (quitte à extraire une sous-suite).

CONCLUSION : Pour presque tout $x \in \mathbb{R}_+$, $T_f(x) = \tilde{T}_f(x)$ et donc $T_f \in L^p(\mathbb{R}_+)$. De plus,

$$||T_f||_{L^p}^p = ||\tilde{T}_f||_{L^p}^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p ||f||_{L^p}^p$$

ce qui prouve l'inégalité.

- **Optimalité de l'inégalité** : Considérons, pour $(\epsilon, R) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ la fonction positive

$$f_\epsilon : t \longmapsto 1_{]0, R[} t^{\epsilon - \frac{1}{p}}$$

Par positivité de T_{f_ϵ} , il vient :

$$||T_{f_\epsilon}||_{L^p}^p \geq \left(\frac{p}{p-1 + \epsilon p}\right)^p ||f_\epsilon||_{L^p}^p$$

$\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ étant arbitraire on a finalement :

$$||T||_{\mathcal{L}_c(L^p)} = \frac{p}{p-1}$$