

Développement asymptotique de la
série harmonique

[GOURDON, FRANCINOUE-GIANELLA-NICOLAS 1, p 156]

ÉNONCÉ :

Théorème :

Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Alors il existe $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

De plus, en notant $k_n := \min\{k \in \mathbb{N}, H_k \geq n\}$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n} = e$.

DÉVELOPPEMENT :

LEMME : Pour $\alpha > 1$, on a $\sum_{k \geq n+1} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$

Démonstration. Pour $\alpha > 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable et décroissante sur $[1, +\infty[$. Ainsi, si $k \geq 2$, on a :

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}$$

En sommant entre $n+1$ et $N \geq n+2$ puis en faisant tendre vers

l'infini, on obtient :

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$$

Or pour $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_n^N \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{N^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right) \\ \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

De la même manière, on a :

$$\int_{n+1}^N \frac{dt}{t^\alpha} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

d'où le résultat. □

Démonstration. (théorème) : De $\frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, comme la série harmonique diverge et comme les termes de ces deux suites sont positifs, il vient :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

Or

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k}\right) = \ln(n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$$

d'où $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

Considérons la suite $u_n = H_n - \ln(n)$, $n \geq 1$, alors on a pour

$n \geq 2$:

$$\begin{aligned} u_n - u_{n+1} &= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, la série de terme général $(u_n - u_{n-1})$ est convergence. Or $\sum_{k=2}^N (u_k - u_{k-1}) = u_N - u_1$, donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite, notée γ , d'où $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$. De plus, on a les équivalents des restes, soit

$$\gamma - u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k - u_{k-1}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

En vertu du lemme applique pour $\alpha = 2$, il vient :

$$\gamma - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$$

d'où $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o(1)$.

En posant, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = u_n - \gamma - \frac{1}{2n}$, on a :

$$\begin{aligned} w_n - w_{n-1} &= \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

De nouveau, par le lemme, on a donc $-w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$. Finalement, on obtient :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o(1)$$

Voyons enfin que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n} = e$.
On écrit $H_n = \ln(n) + \gamma + \epsilon_n$ où $\epsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Par définition de k_n , on a :

$$\ln(k_n) + \gamma + \epsilon_{k_n} \geq n$$

et

$$\ln(k_n - 1) + \gamma + \epsilon_{k_n-1} < n$$

En passant à l'exponentielle, il vient :

$$e^n e^{-\gamma - \epsilon_{k_n} - 1} + 1 > k_n \geq e^n e^{-\gamma - \epsilon_{k_n}}$$

D'où $k_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^n e^{-\gamma}$ et donc finalement $\frac{k_{n+1}}{k_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e$, d'où le résultat. □

Remarques :

- Cet un ultra-classique, il n'est pas très dur mais cependant un peu calculatoire.
- On utilise à plusieurs reprises les équivalents des restes et sommes partielles selon la divergence ou convergence des séries : il faut connaître les hypothèses de ce théorème et savoir le remonter.
- Il est possible de continuer l'itération pour obtenir le terme suivant ; en particulier, la formule d'EULER-MCLAURIN permet d'obtenir ces derniers.