Théorème d'Ascoli

[BERNIS, p 23]

ÉNONCÉ :

Théorème d'Ascoli :
Soient (K,d) un espace métrique compact et $\mathcal{A}$ une partie de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}(K,\mathbb{C}), ||.||_\infty)$ des fonctions continues sur K. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- La partie $\mathcal{A}$ est équicontinue et bornée.
- La partie $\mathcal{A}$ est relativement compacte.

DÉVELOPPEMENT :

- **Supposons que $\mathcal{A}$ soit équicontinue et bornée**.

LEMME : Il existe une suite dense $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K et une sous suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad (f_{n_k}(x_p))_{k\in\mathbb{N}} \ \text{ converge}$$

Démonstration. L'espace métrique (K,d) étant compact, il est séparable. Il existe donc une suite dense $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ étant bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $||f_n||_\infty \leq M$.
Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il vient :

$$\{f_n(x_p); n \in \mathbb{N}\} \subset \overline{B(0,M)}$$

Cet ensemble est ainsi relativement compact dans $\overline{B(0,M)}$. Par le procédé d'extraction diagonale, il existe une sous-suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la suite $(f_{n_k}(x_p))_{k\in\mathbb{N}}$ converge. □

Voyons que cette convergence simple se réalise sur tout K.
Fixons $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$. L'ensemble $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant équicontinu sur le compact K, il est uniformément équicontinu (Théorème de Heine). Ainsi, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall (x,y) \in K^2, \ (d(x,y) \leq \eta) \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \ |f_n(x) - f_n(y)| \leq \epsilon$$

Par densité de la suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ dans (K,d), on a

$$K \subset \bigcup_{p\geq 0} B(x_p, \eta)$$

Par la propriété de Borel-Lebesgue, il existe $(y_1, \ldots, y_N) \subset (x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(y_i, \eta)$$

Par le lemme qui précède, pour $i \in \{1,\ldots,N\}$, $(f_{n_k}(y_i))_{k\in\mathbb{N}}$ converge donc est de Cauchy. Il existe donc $n_i \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall (k,k') \in \mathbb{N}^2, \ k' \geq k \geq n_i, \ |f_{n_k}(y_i) - f_{n_{k'}}(y_i)| \leq \epsilon$$

Soient $x \in K$ et $i_0 \in \{1,\ldots,N\}$ tel que $x \in B(y_i,\eta)$. On pose $n_{max} := max\{n_i; i \in \{1,\ldots,N\}\}$. Alors pour $(k,k') \in \mathbb{N}^2$ tel que $k' \geq k \geq n_{max}$, on a :

$$\begin{aligned} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k'}}(x)| &\leq |f_{n_k}(x) - f_{n_k}(y_{i_0})| + |f_{n_k}(y_{i_0}) - f_{n_{k'}}(y_{i_0})| \\ &+ |f_{n_{k'}}(y_{i_0}) - f_{n_{k'}}(x)| \\ &\leq 3\epsilon \end{aligned}$$

L'entier n_{max} étant indépendant de x, en passant à la borne supérieure, il vient :

$$||f_{n_k} - f_{n_{k'}}||_\infty = \sup_{y \in K} |f_{n_k}(y) - f_{n_{k'}}(y)| \leq 3\epsilon$$

Ainsi, la suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans $(\mathcal{C}(K,\mathbb{C}), ||.||_\infty)$ qui est de Banach, donc converge vers un élément de $\mathcal{C}(K,\mathbb{C})$. Finalement, $\mathcal{A}$ est relativement compacte.

- **Supposons que $\mathcal{A}$ soit relativement compacte**. $\overline{\mathcal{A}}$ est compacte donc bornée donc $\mathcal{A}$ est bornée.
  Fixons $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Par précompacité de $\overline{\mathcal{A}}$, on dispose d'éléments $f_1, \dots, f_{N_\epsilon}$ de $\mathcal{C}(K,\mathbb{C})$ tels que :

$$\overline{\mathcal{A}} \subset \bigcup_{i=1}^{N_\epsilon} B(f_i, \epsilon)$$

  Pour $i \in \{1, \dots, N_\epsilon\}$, f_i est uniformément continue par le théorème de Heine sur le compact K. Par conséquent, il existe $\eta_i \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall (x,y) \in K^2, (d(x,y) \leq \eta_i) \Longrightarrow (d(f(x), f(y)) \leq \epsilon)$$

  Posons $\eta = min\{\eta_i; i \in \{1, \dots, N_\epsilon\}\}$.
  Soit $(x,y) \in K^2$ vérifiant $d(x,y) \leq \eta$. Soient $f \in \mathcal{A}$ et $i_0 \in \{1, \dots, N_\epsilon\}$ tel que $f \in B(f_{i_0}, \epsilon)$. Alors on a :

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_{i_0}(x)| + |f_{i_0}(x) - f_{i_0}(y)| \\ &\quad + |f_{i_0}(y) - f(y)| \\ &\leq 3\epsilon\end{aligned}$$

  Ainsi, $\mathcal{A}$ est équicontinue.

Remarques :

- La preuve du théorème utilise le procédé d'extraction diagonale ainsi que l'uniforme équicontinuité sur un compact : il faut donc maitriser les grandes lignes de ces preuves.
- Il faut avoir en tête ses applications classiques : théorème de MONTEL, de CAUCHY-PEANO.
- Il faut connaître des ensembles $\mathcal{A}$ classiques : l'ensemble fonctions höldériennes dans $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{C}), ||.||_\infty)$ dont l'image de 0 est uniformément majorée en est un.