

236

Développement: Transformée de Fourier d'une gaussienne

239

245

Théorème: Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors pour tout $u \in \mathbb{R}$:

250

$$\mathcal{F}(e^{-ax^2})(u) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{u^2}{4a}\right)$$

Démonstration: Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On pose γ_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\gamma_a(x) = e^{-ax^2}$. Pour tout $u \in \mathbb{R}$ on a: $\hat{\gamma}_a(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2 - iux} dx$

$$\text{On écrit } ax^2 + iux = a\left(x^2 + i\frac{ux}{a}\right) = a\left(x + i\frac{u}{2a}\right)^2 + \frac{u^2}{4a}$$

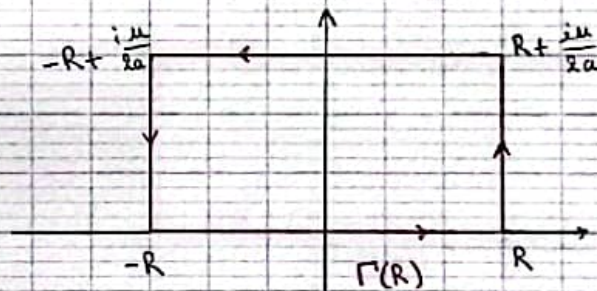
$$\text{On a alors } \hat{\gamma}_a(u) = e^{-\frac{u^2}{4a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-a\left(x + i\frac{u}{2a}\right)^2} dx.$$

rapidité: --

14 min 06 s

Considérons la fonction de $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto e^{-az^2}$

Pour $R > 0$ et $u \in \mathbb{R}$ fixé, notons $\Gamma(R)$ le contour suivant:



$$\begin{aligned} \text{On a: } \int_{\Gamma(R)} e^{-az^2} dz &= \int_{-R}^R e^{-ax^2} dx + i \int_0^{\frac{u}{2a}} e^{-a(R+it)^2} dt - \int_{-R}^R e^{-a\left(x + i\frac{u}{2a}\right)^2} dx - i \int_0^{\frac{u}{2a}} e^{-a(-R+it)^2} dt \\ &= I_1(R) + I_2(R) - I_3(R) - I_4(R). \end{aligned}$$

• Pour $I_1(R)$

Int de Gauss

On sait que $\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$. En faisant le changement de variable $u = \sqrt{a}x$ dans $I_1(R)$ on obtient que $\lim_{R \rightarrow +\infty} I_1(R) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ (thm de Jordan à $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt$)

• Pour $I_2(R)$. On a:

$$|I_2(R)| \leq \int_0^{\frac{u}{2a}} |e^{-a(R+it)^2}| dt = \int_0^{\frac{u}{2a}} e^{-a(R^2-t^2)} dt = \int_0^{\frac{u}{2a}} e^{-a(R^2-t^2)} dt$$

car $(\frac{1}{z})$ est une variable z ?

De plus, $\int_0^{\frac{R}{2a}} e^{-a(t'-t'')} = e^{-aR'} \int_0^{\frac{R}{2a}} e^{t'} dt' \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$

- Pour $I_4(R)$. On procède de la même manière que pour $I_2(R)$ et on montre que $|I_4(R)| \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$

démontrer si
ça pas anguille
sous roche.

- Pour $I_3(R)$. Puisque l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x + i\frac{\mu}{2a})^2} dx$ converge absolument, d'après ce qu'on a remarqué, on a:
$$\lim_{R \rightarrow +\infty} I_3(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x + i\frac{\mu}{2a})^2} dx = e^{-\frac{\mu^2}{4a}} \hat{\gamma}_a(\mu)$$

La fonction $z \mapsto e^{az^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et le contour $\Gamma(R)$ est fermé, donc d'après le théorème de Cauchy $\int_{\Gamma(R)} e^{az^2} = 0$

peut-on $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma(R)} e^{az^2} = 0$? On obtient alors, en faisant tendre $R \rightarrow +\infty$:

$$0 = \sqrt{\frac{\pi}{a}} + 0 - e^{-\frac{\mu^2}{4a}} \hat{\gamma}_a(\mu) = 0$$

d'où $\hat{\gamma}_a(\mu) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\mu^2}{4a}}$

Autre méthode : On peut considérer l'intégrale à paramètre

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{zx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Montrer que F est holomorphe. Calculer $F(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$. En déduire $F(z)$ pour $z \in \mathbb{C}$ par le théorème des zéros isolés. Conclure en considérant $F(it)$