

20-1 Développement : Théorème de Weierstrass (convolution)

203

209

228

Définition : une suite de fct mesurables $(X_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une approximatⁿ de l'unité si :

- $\forall m \in \mathbb{N}, X_m \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}} X_m = 1$
- $\forall \delta > 0, \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{|x| \geq \delta} X_m(x) dx = 0$ *

Théorème : Soit J un segment de $\mathbb{R}$ et $g \in C(J, \mathbb{R})$, alors g est limite uniforme sur J d'une suite de fonctions polynomiales.

Démon : On note E l'esp des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et nulles en dehors d'un compact.

Soient $g \in E$ et $(X_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une approximation de l'unité.

Heine ?

Soit $\epsilon > 0$, comme g continue et nulle en dehors d'un compact, elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$: $\exists \eta > 0$ tq $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leq \epsilon$.

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}, |g * X_m(x) - g(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} [g(x-t) - g(x)] X_m(t) dt \right|$$

$$\leq \int_{|t| > \eta} |g(x-t) - g(x)| X_m(t) dt + \int_{|t| \leq \eta} |g(x-t) - g(x)| X_m(t) dt$$

$$\leq 2 \|g\|_{\infty} \int_{|t| > \eta} X_m(t) dt + \epsilon \int_{|t| \leq \eta} X_m(t) dt \leq (2 \|g\|_{\infty} + 1) \epsilon$$

(avec $m \geq m_0$ où m_0 tel que $\forall m \geq m_0, \int_{|t| > \eta} X_m(t) dt \leq \epsilon$) *

On a montré que $g * X_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} g$ sur $\mathbb{R}$

(2) On pose pour $m \in \mathbb{N}, a_m = \int_{-1}^1 (1-t^2)^m dt$ et $p_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, p_m(x) = \begin{cases} \frac{(1-x^2)^m}{a_m} & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Montrons que $(p_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité :

• $\forall m \in \mathbb{N}, p_m$ est mesurable positive (bien définie car $a_m > 0$)

$$\bullet \int_{\mathbb{R}} p_m(t) dt = \int_{-1}^1 \frac{(1-t^2)^m}{a_m} dt = \frac{a_m}{a_m} = 1$$

$$\bullet \forall m \in \mathbb{N}^*, a_m = 2 \int_0^1 (1-t^2)^m dt \geq 2 \int_0^1 t (1-t^2)^{m-1} dt = \left[-\frac{(1-t^2)^m}{m+1} \right]_0^1 = \frac{1}{m+1}$$

$$\bullet \text{Si } \delta > 1, \int_{|t| \geq \delta} p_m(t) dt = 0 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{Si } 0 < \delta < 1, 0 \leq \int_{|t| \geq \delta} p_m(t) dt = \frac{2}{a_m} \int_{\delta}^1 (1-t^2)^m dt \leq \frac{2}{a_m} (m+1) (1-\delta) (1-\delta^2)^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \text{ par croissance comparée}$$

(3) Soit $g \in E$ nulle en dehors de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, soit $m \in \mathbb{N}$. Hq $g * p_m$ est une fct polynôme.

$$\text{Soit } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \text{ puisque } \text{supp } g \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], g * p_m(x) = \int_{-1}^1 p_m(x-t) g(t) dt.$$

$$\text{Si } t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \text{ alors } |x-t| \leq 1 \text{ et } p_m(x-t) = \frac{(1-(x-t)^2)^m}{a_m} = \sum_{k=0}^m q_k(x) x^k$$

par le binôme de Newton (avec q_k polynomiales)

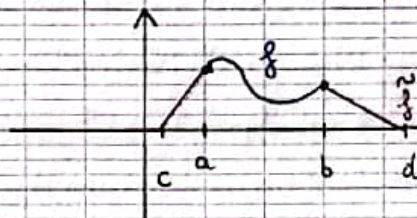
norme L^1 on peut intégrer

$$\text{Ainsi, } f * p_n(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) \sum_{k=0}^{2n} q_k(t) x^k dt = \sum_{k=0}^{2n} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) q_k(t) dt \right) x^k$$

donc $f * p_n$ est polynomiale sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

D'après (2) et (3), $f * p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] = I$ et f est limite uniforme de fonctions polynomiales sur I .

- (4) Soit $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ et $f : J \rightarrow \mathbb{C}$ continue. En considérant un intervalle plus grand $[c, d]$ avec $c < a, b < d$, on prolonge f sur $[c, a]$ (resp $[b, d]$) par une fonction affine prenant la valeur 0 en c et $f(a)$ en a (resp $f(b)$ en b et 0 en d). On prolonge ensuite f sur $\mathbb{R}$ tout entier en prenant $f(x) = 0$ hors de $[c, d]$. Le prolongement ainsi construit de f est continu sur $\mathbb{R}$.



f continue, nulle
en dehors d'un compact.
 $f \in \mathcal{C}$

$$[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \xrightarrow{\varphi} [c, d]$$

Avec le changement de coordonnées $\varphi : x \mapsto (d-c)x + c + d$

A peine
vérifier

(cas 4 affines)

Alors $f \circ \varphi$ est nulle sur $\mathbb{R} \setminus [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et est continue, d'après (3) il existe (P_m) une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers $f \circ \varphi$.

En considérant $\forall m, Q_m : x \mapsto P_m \circ \varphi^{-1}(x)$, Q_m est bien polynomiale sur $[c, d]$ qui converge vers f sur $[c, d]$ donc sur $[a, b] \subset [c, d]$.