

207

230

241

243

Développement : Théorème d'Abel angulaire et application / Tauberman faible.

Théorème (d'Abel) : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ≥ 1

telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série entière sur le disque unité.

On fixe $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (donc $\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1, \exists \rho > 0, \exists \theta \in [\theta_0, 0], z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$)

Alors $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ Que dire si les a_n sont positifs ?

①

Démonstration : Soit $m \in \mathbb{N}$, on note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $R_m = \sum_{k=m+1}^{+\infty} a_k$. Pour majorer $|f(z) - S|$ on va effectuer une transformation d'Abel en écrivant $a_n = R_{n-1} - R_n$ pour tout n .

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, alors :

$$\begin{aligned} f(z) - S &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z^n - 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} (R_{n-1} - R_n) (z^n - 1) = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n (z^{n+1} - 1) - \sum_{n=1}^{+\infty} R_n (z^n - 1) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} R_n (z^{n+1} - z^n) = (z-1) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n \quad (*) \end{aligned}$$

Existe-t-il

 $R_m \rightarrow 0$

②

Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $|R_m| < \varepsilon$ pour tout $m \geq N$. D'après (*), pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$:

$$|f(z) - S| \leq |z-1| \left| \sum_{n=0}^N R_n z^n \right| + \varepsilon |z-1| \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} |z|^n \right) \leq |z-1| \left(\sum_{n=0}^N |R_n| \right) + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|} \quad (**)$$

Posons $\alpha = \varepsilon \times \left(\sum_{n=0}^N |R_n| \right)^{-1}$, alors on a :

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1, |z-1| < \alpha, \quad |z-1| \left(\sum_{n=0}^N |R_n| \right) < \varepsilon$$

③

Maintenant, si $z \in \Delta_{\theta_0}$, on peut écrire $z = 1 - \rho e^{i\varphi}$ avec $\rho > 0$ et $|\varphi| \leq \theta_0$, donc $|z|^2 = 1 - 2\rho \cos \varphi + \rho^2$ et :

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{|z-1|}{1-|z|^2} (1+|z|) = \frac{\rho (1+|z|)}{2\rho \cos \varphi - \rho^2} \leq \frac{2}{2\cos \varphi - \rho}$$

Ainsi, si $\rho \leq \cos \theta_0$, alors :

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} \leq \frac{2}{2\cos \theta_0 - \cos \theta_0} = \frac{2}{\cos \theta_0}$$

④

En définitive, si $z \in \Delta_{\theta_0}$ et $|z-1| \leq \sin \theta_0$ on a d'après (**):

$$|f(z) - S| \leq \varepsilon + \varepsilon \frac{2}{\cos \theta_0} = \varepsilon \left(1 + \frac{2}{\cos \theta_0} \right)$$

d'où le résultat.

⑤ Applications : (et remarques)

• En appliquant le résultat à la série $\sum \frac{(-1)^m}{2m+1}$ on en déduit :

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} x^m = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \arctan x = \arctan -1 = -\frac{\pi}{4}$$

• Si la série $\sum a_m$ converge absolument, le résultat est évident (en effet, $\sum a_m z^m$ converge alors normalement sur $|z| \leq 1$, donc est continue sur $|z| \leq 1$, donc en -1).

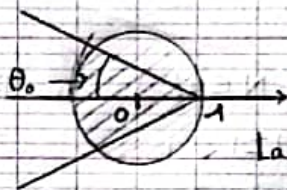
• La réciproque de ce théorème est fautive. Par exemple on a

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| < 1}} \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m z^m = \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| < 1}} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}$$

et pourtant, $\sum (-1)^m$ diverge.

Cependant, si $a_m = o(\frac{1}{m})$ (théorème taubérien faible) ou mieux, si $a_m = O(\frac{1}{m})$ (théorème taubérien fort), la réciproque est vraie.

Schéma :



La région Δ_{θ_0} . L'écartement du secteur angulaire est $2\theta_0$.

A savoir (au moins les énoncés, éventuellement les preuves) :

Preuve p 251

Théorème (Taubérien faible) : Soit $\sum a_m z^m$ une série entière de rayon de convergence 1 et g la somme de cette série entière sur le disque unité.

On suppose que $\exists S \in \mathbb{C}, \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} g(x) = S$

Si $a_m = o(\frac{1}{m})$ alors $\sum a_m$ converge et $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m = S$.

Preuve p 284-286

Remarque : le théorème que l'on appelle habituellement théorème taubérien de Hardy et Littlewood (ou théorème taubérien fort) est l'énoncé précédent en remplaçant la condition $a_m = o(\frac{1}{m})$ par la condition beaucoup moins forte $a_m = O(\frac{1}{m})$.