

223

Développement : Suite des sinus itérés

224

226

Théorème : Soit (u_m) une suite vérifiant $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et

230

$\forall m \in \mathbb{N}, u_{m+1} = \sin(u_m)$. Alors :

i) (u_m) tend vers 0 et $u_m \sim \sqrt{\frac{3}{m}}$

ii) Un développement asymptotique à deux termes de (u_m) est

$$u_m = \sqrt{\frac{3}{m}} - \frac{3\sqrt{3}}{10} \frac{\ln(m)}{m\sqrt{m}} + o\left(\frac{\ln(m)}{m\sqrt{m}}\right)$$

pour quels m ?

①

Démon : L'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}]$ est stable par la fonction sinus, donc $u_m \in]0, \frac{\pi}{2}]$

pour tout $m \in \mathbb{N}$. De plus on a $\sin x < x$ sur cet intervalle, donc la suite (u_m) est strictement décroissante. Par ailleurs, elle est minorée par 0, elle converge donc.

Si la limite l vérifie $\sin(l) = l$, donc $l = 0$. trivial ou pas ?

②

Donnons maintenant un équivalent de (u_m) . Remarquons que :

$$\frac{1}{u_{m+1}^2} - \frac{1}{u_m^2} = \frac{1}{\sin^2 u_m} - \frac{1}{u_m^2} = \frac{1}{(u_m - u_m^3/6 + o(u_m^5))^2} - \frac{1}{u_m^2}$$

$$= \frac{1}{u_m^2} \left(\frac{1}{1 - u_m^2/3 + o(u_m^4)} - 1 \right) = \frac{1}{u_m^2} \left(\frac{u_m^2}{3} + o(u_m^4) \right) = \frac{1}{3} + o(u_m^2) \sim \frac{1}{3}$$

(on a bien le droit de faire ces développements limités car $u_m \rightarrow 0$). Cet équivalent

montre que la série $\sum \left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} \right)$ diverge, et en sommant les équivalents on obtient (on a le droit car les deux séries sont à termes positifs, voir thm 5 p 204)

$$\frac{1}{u_m^2} - \frac{1}{u_0^2} = \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} \right) \sim \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{3} = \frac{m}{3}$$

Autrement dit $\frac{1}{u_m^2} \sim \frac{m}{3}$ donc

$$u_m \sim \sqrt{\frac{3}{m}}$$

③

On procède comme plus haut, en cherchant cette fois-ci un développement asymptotique

à deux termes de $\frac{1}{u_{m+1}^2} - \frac{1}{u_m^2}$. On a :

$$u_{m+1} = \sin u_m = u_m - \frac{u_m^3}{6} + \frac{u_m^5}{120} + o(u_m^5) = u_m \left(1 - \frac{u_m^2}{6} + \frac{u_m^4}{120} + o(u_m^4) \right)$$

la présence 6 ?

change quelque chose ?

donc

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} = \frac{1}{u_n^2} \left(1 + \frac{u_n^2}{3} + \frac{u_n^4}{15} + o(u_n^4) \right) \text{ d'où } \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{3} = \frac{u_n^2}{15} + o(u_n^2) \sim \frac{u_n^2}{15} \sim \frac{1}{5n}$$

(le dernier équivalent provenant du fait que $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$ par ②)

Comme précédemment, ces expressions sont les termes généraux de séries qui divergent, et on peut sommer les équivalents, ce qui donne

$$\frac{1}{u_m^2} - \frac{1}{u_0^2} - \frac{m}{3} = \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} - \frac{1}{3} \right) \sim \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{5k} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{à environ} \\ \text{montée}}}{\sim} \frac{\log(m)}{5}$$

et finalement

DL $(-1+x)^\alpha$

$$u_m^2 = \left(\frac{m}{3} + \frac{\log(m)}{5} + o(\log(m)) \right)^{-1} \text{ d'où } u_m = \sqrt{\frac{3}{m}} - \frac{3\sqrt{3}}{10} \cdot \frac{\log(m)}{m\sqrt{m}} + o\left(\frac{\log(m)}{m\sqrt{m}}\right)$$

A savoir faire :

Exercice 5 p. 204

- Énoncer le théorème de sommation des équivalents et justifier que l'on peut l'utiliser ici.
- (*) - Prouver que si $0 \leq u_n \leq v_n$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- Pousser le développement asymptotique à un terme de plus.
- Pourquoi étudie-t-on $\frac{1}{u_n^2}$?
- Montrer l'inégalité $\ln(-1+x) \leq x$. Sur quel domaine est-elle valide ?

(*) Preuve : On pose $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $s'_n = \sum_{k=0}^n v_k$, on a $s_n \leq s'_n$.

Les suites (s_n) et (s'_n) sont croissantes (on somme des termes positifs) et la deuxième converge. On a donc $s'_n \leq s'$ ce qui prouve que (s_n) est croissante majorée donc converge.