

244 Développement : Formule sommatoire de Poisson.

246

250

Théorème : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide non réduit à un point. Soit E un $\mathbb{K}$ env. de dimension finie ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $f_n : I \rightarrow E$ une suite de fonctions. Supposons que :

- i) pour tout $m \in \mathbb{N}$, f_m est de classe C^1 sur I .
- ii) $\sum_{m \geq 0} f_m$ converge simplement sur I .
- iii) $\sum_{m \geq 0} f'_m$ converge uniformément sur tout segment de I .

Alors :

- $\sum f_m$ converge uniformément sur I .
- $\sum f_m$ est de classe C^1 et $(\sum f_m)' = \sum f'_m$.

Théorème : Soit $f : I \times X \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Supposons que :

- i) pour tout $u \in I$, $x \mapsto f(u, x) \in L^1_{\mu}(X)$.
- ii) $\mu(dx) \neq 0$, $u \mapsto f(u, x)$ est dérivable sur I .
- iii) $\mu(dx) \neq 0$, $\forall u \in I$, $|\frac{\partial f}{\partial u}(u, x)| \leq g(x)$, $g \in L^1_{\mu}(X)$.

Alors la fct $F(u) = \int_X f(u, x) \mu(dx)$ est définie et dérivable sur I et sa dérivée est donnée par $F'(u) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u, x) \mu(dx)$.

analpt :

Théorème : Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fct de classe C^1 vérifiant $g(x) = O(\frac{1}{x^2})$ et $g'(x) = O(\frac{1}{x^2})$ lorsque $|x| \mapsto +\infty$. Alors pour tout $z \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} g(x+m) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} g^*(m) e^{2\pi i m x} \quad \text{et} \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \quad g^*(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-2\pi i m t} dt.$$

(1) Démon : Montrons que $\sum_{m \in \mathbb{Z}} g(x+m)$ converge normalement (donc uniformément) sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Maximiser $g = O(\frac{1}{x^2})$. Si $M > 0$ est tel que $|g(x)| \leq \frac{M}{x^2}$ pour $|x| > 1$, il suffit d'écrire pour tout $K > 0$ la majoration :

$$|m| - K < |m| - x \quad \forall x \in [-K, K], \forall m \in \mathbb{Z}, |m| > K+1, \quad |g(x+m)| \leq \frac{M}{(x+m)^2} \leq \frac{M}{(|m| - K)^2}$$

$$\hookrightarrow m \geq 0, |m| - K < m - x$$

$$\hookrightarrow m \leq 0, (|m| - K)^2 < (m - x)^2 = (|m| + x)^2$$

$\hookrightarrow m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$ On a donc ainsi que $\sum_{m \in \mathbb{Z}} g(x+m)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note F la limite simple.

$C^1 \Rightarrow C^\infty$

De même, la série de fonctions $\sum_{m \in \mathbb{Z}} f'(x+m)$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$. On applique le théorème de dérivation terme à terme qui entraîne que F est C^1 sur tout segment de $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}$.

(2) Montrons que F est 1-périodique. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=-N}^N f(x+1+m) = \sum_{n=N+1}^{N+1+m} f(x+n)$$

On fait tendre $N \rightarrow +\infty$ et on obtient $F(x+1) = F(x)$.

(3) On cherche à calculer les coefficients de Fourier de F . Soit $m \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} c_m(F) &= \int_0^1 F(t) e^{-2i\pi m t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(t+k) e^{-2i\pi m t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+1} f(t) e^{-2i\pi m t} dt \quad \text{CDV } t \leftarrow t+k \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi m t} dt \\ &= f^*(m). \end{aligned}$$

CDV $t \leftarrow t+k$.

Relation de Plancherel

indication ES possible car la série de Fourier de F converge uniformément sur $\mathbb{R}$

Dérivée
F est C^1 et 1-périodique

Comme de plus F est C^1 , sa série de Fourier converge uniformément vers F .

Application : Soit $s > 0$, alors $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s} = s^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \frac{n^2}{s}}$.

(4) Démonstration : Soit $s > 0$, on applique la formule sommatoire de Poisson à la fonction $g : x \mapsto e^{-\pi s x^2}$ (qui vérifie bien les hypothèses). Alors pour tout $m \in \mathbb{Z}$:

$$g^*(m) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi s t^2} e^{-2i\pi m t} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi s}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} e^{-\frac{2i\pi m u}{\sqrt{\pi s}}} du$$

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $I(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} e^{-\frac{2i\pi x u}{\sqrt{\pi s}}} du =: \int_{\mathbb{R}} h(x, u) du$.

• $\forall x \in \mathbb{R}$, $u \mapsto h(x, u)$ intégrable sur $\mathbb{R}$ (c'est une $o(\frac{1}{u^2})$)

• Pour presque tout $u \in \mathbb{R}$, $x \mapsto h(x, u)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

• Pour $x \in \mathbb{R}$, $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(u, x) \right| = \left| e^{-u^2} \frac{2i\pi u}{\sqrt{\pi s}} e^{-\frac{2i\pi x u}{\sqrt{\pi s}}} \right| = \frac{2\pi |u|}{\sqrt{\pi s}} e^{-u^2} \in L^1(\mathbb{R}) \cap o\left(\frac{1}{u^2}\right)$

On peut dériver sous le signe intégrale

On a donc $I'(x) = -\frac{2\pi i}{\sqrt{\pi s}} \int_{\mathbb{R}} u e^{-u^2} e^{-\frac{2i\pi x u}{\sqrt{\pi s}}} du$

Soit g et g' qui sont C^∞

On fait une IPP avec : $v(u) = e^{-\frac{2i\pi x u}{\sqrt{\pi s}}}$ $v'(u) = -\frac{2i\pi x}{\sqrt{\pi s}} v(u)$
 $w(u) = u e^{-u^2}$ $w'(u) = -\frac{1}{2} e^{-u^2}$

On obtient donc

$$I'(x) = \left[-\frac{1}{2} e^{-\frac{2i\pi x u}{\sqrt{\pi}\Delta}} e^{-u^2} \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{2\pi x}{\Delta} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{2i\pi x u}{\sqrt{\pi}\Delta}} e^{-u^2} du \\ = -\frac{2\pi x}{\Delta} I(x)$$

Ainsi I vérifie l'équation différentielle : $I'(x) + \frac{2\pi x}{\Delta} I(x) = 0$

int de Gauss

On obtient donc $I(x) = I(0) e^{-\frac{\pi x^2}{\Delta}} = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\pi x^2}{\Delta}}$

En réinjectant l'expression dans le calcul précédent on obtient $f^*(m) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} e^{-\frac{\pi m^2}{\Delta}}$
Il ne reste plus qu'à appliquer la formule sommatoire de Poisson pour $x=0$.

Pour l'oral : sauter l'appelée car directement l'équation différentielle vérifiée par I . (si on manque de temps)

Prérequis : Savoir calculer l'intégrale de Gauss