

Ordre de priorité, équivalence des normes puis Riesz ? Si oui p 12 ?

203

Développement : Equivalence des normes en dimension finie et théorème de Riesz

206

208

Théorème de Riesz : Si un espace normé E possède une boule compacte $B(x, r)$, de rayon $r > 0$, alors $\dim E < +\infty$.

Démonstration : Notons que si une boule est compacte, c'est forcément une boule fermée ? D'autre part, si une boule, de rayon > 0 , est compacte, alors toutes les boules fermées le sont, puisqu'elles sont homéomorphes entre elles (celles de rayon nul étant de toute façon compactes). Il suffit donc de montrer que si E est de dimension infinie, alors sa boule unité B_E n'est pas compacte. Pour cela on utilisera un lemme :

Lemme de Riesz : Soit F un sous-fermé d'un espace normé E ($F \neq E$).

Alors : $\forall \delta \in]0, 1[$, $\exists x \in E$ tel que $\begin{cases} \|x\| = 1 \\ \text{dist}(x, F) \geq 1 - \delta \end{cases}$

Soit E un espace normé de dimension infinie. Fixons un nombre $\delta \in]0, 1[$, par exemple $\delta = \frac{1}{2}$.

F , sous-espace de E , $\dim F$

fermé mais pas fermé

pourquoi F fermé ?

Prenons d'un $x_1 \in E$, de norme 1, et prenons pour F le sous-espace $F_1 = \text{vect}(x_1) = \langle x_1 \rangle$. Comme il est de dimension 1 (finie) il est fermé et n'est pas égal à E (puisque E est de dimension infinie). D'après le lemme, il existe $x_2 \in E$, de norme 1 tel que $\|x_2 - x_1\| \geq \text{dist}(x_2, F_1) \geq 1 - \delta = \frac{1}{2}$. (en particulier $x_2 \notin F_1$)

Prenons ensuite pour F le sous-espace $F_2 = \text{vect}(x_1, x_2)$. Il est de dimension 2 car ($x_2 \notin F_1$), et est donc fermé (car la dimension finie) et différent de E .

D'après le lemme il existe $x_3 \in E$ de norme 1 tel que :

$$\|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2} \text{ et } \|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \text{dist}(x_3, F_2) \geq \frac{1}{2}$$

Comme E est de dimension infinie, on obtient par récurrence une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de norme 1 telle que : $\|x_k - x_l\| \geq \frac{1}{2}$, $\forall k \neq l$.

Cette suite ne peut avoir aucune sous-suite convergente (car pas de Cauchy !)

Comme elle est contenue dans la boule unité de E , cette boule n'est pas compacte.

$\text{Cauchy} \Rightarrow \text{convergent}$

donc

$\text{Cauchy} \Rightarrow \text{convergent}$

$d = \inf_{y \in F} \|x_0 - y\|$ donc
 $\forall \varepsilon > 0, \exists y_0, \dots$
 $d \leq \|x_0 - y_0\| < d + \varepsilon$
 en partant de d , $d + \varepsilon = \frac{d}{1-\delta}$
 $\forall y \in F$

Démonstration (Lemme): Comme $F \neq E$, on peut trouver $x_0 \in E \setminus F$. Comme F est fermé on a: $d = \text{dist}(x_0, F) > 0$? (remarque: $d > 0$?)
 Comme $0 < \delta < 1$, on a $\frac{d}{1-\delta} > d$ et on peut trouver $y_0 \in F$ tel que $\|x_0 - y_0\| \leq \frac{d}{1-\delta}$. Il ne reste plus qu'à "corriger" x_0 par y_0 et à normaliser le vecteur.
 Soit $x = \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|}$, c'est bien un vecteur de norme 1 et, comme $y_0 + \|x_0 - y_0\| y \in F$ (F fermé) on a:
 $\|x - y\| = \frac{1}{\|x_0 - y_0\|} \|(x_0 - y_0) - \|x_0 - y_0\| y\| \geq \frac{\text{dist}(x_0, F)}{\|x_0 - y_0\|} = \frac{d}{\|x_0 - y_0\|} \geq 1 - \delta$

Théorème: Dans un c.v.m. de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Démonstration: Soit E un K.v.s. ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie, $(e_1, \dots, e_n)$ base de E . Pour tout $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $N_0(x) = \sup_i |x_i|$ définit une norme sur E .
 Montrons que toutes les normes sur E sont équivalentes à N_0 . Soit N une norme sur E . En désignant a le réel $\sum_{i=1}^n N(e_i)$, on a pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$:

$$(*) \quad N(x) \leq \sum_{i=1}^n N(x_i e_i) = \sum_{i=1}^n |x_i| N(e_i) \leq a N_0(x)$$

S compact donc N
 atteint sa borne inf
 $\downarrow$
 $x=0 \notin S$?
 et donc a peut
 diviser

On munit K^n de la norme produit $\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \sup_i |x_i|$. L'application $\varphi: (K^n, \|\cdot\|_2) \rightarrow (E, N_0), (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum x_i e_i$ est une isométrie, donc $S = \{x \in E, N_0(x) = 1\}$ est un compact de (E, N_0) (image de la sphère unité de K^n - qui est compacte car fermée bornée dans K^n - par φ continue (car isométrie)).
 D'après (*), on a $|N(x) - N(y)| \leq N(x-y) \leq a N_0(x-y)$, donc $N: (E, N_0) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue. Comme S est un compact de (E, N_0) , on en déduit que $b = \inf_{N_0(x)=1} N(x) \neq 0$. Ainsi:

$$\forall x \in E, x \neq 0, \quad N(x) = N_0(x) N\left(\frac{x}{N_0(x)}\right) \geq b N_0(x)$$
 Avec (*), on en déduit le théorème.