

Développement : Equivalent des suites définies par récurrence

Thomas W.

27 juillet 2023

Leçons concernées :

- 223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.*****
- 224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.*****
- 226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.*****
- 230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou de sommes partielles des séries numériques. Exemples.*****

Références :

- Analyse pour l'agrégation de mathématiques, 40 développements, J.Bernis et L.Bernis
- Analyse, X.Gourdon

C'est un développement qui va rentrer parfaitement dans toutes les leçons sur les suites et qui vous fera prendre du recul sur beaucoup de choses. En tout cas ça a été le cas pour moi. J'ai très souvent dû travailler tout seul en me contentant des corrections que je trouvais dans les livres que j'utilisais ou sur internet, sans savoir qu'en fait je manquais énormément de choses car les corrections sont bien souvent incomplètes et ne permettent pas de progresser. Mais quand on ne le sait pas, on se dit que c'est de notre faute et qu'on est juste pas assez bon. En fait, je me souviens que j'avais la mentalité de me dire "et comment on aurait pu y penser ? Quels raisonnements ont mené à cette preuve ?", mais les corrections que je trouvais dans les livres étaient tellement bâclées que je pensais qu'il fallait juste une intuition divine pour y arriver et que c'était au delà de mes compétences. C'est dommage et même un peu abusé. Mais bon, peut-être que je suis le seul à avoir vécu ça. J'ai déjà abordé cette question dans mon développement sur le théorème de Frobenius. Je vais illustrer mon propos par un exemple qui va en plus introduire le thème du développement.

Nous allons chercher à donner un équivalent de la suite (u_n) définie par récurrence comme suit :

$$\begin{cases} u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}] \\ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$$

Tout d'abord, on montre que la suite u_n tend vers 0. Par récurrence, on montre que la suite $(u_n)_n$ est positive car $\sin$ est positive sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. Ensuite la suite $(u_n)_n$ est décroissante car on a l'inégalité $\sin(x) \leq x$ pour tout x positif. Comme on a montré que la suite $(u_n)_n$ est positive, on a donc $u_{n+1} = \sin(u_n) \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, la suite $(u_n)_n$ étant décroissante, minorée (par 0), elle converge vers une certaine limite $l \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Comme $\sin$ est continue, l va être un point fixe de $\sin$ dans $[0, \frac{\pi}{2}]$ et donc $l = 0$. Jusque là ça va car c'est une méthode assez usuelle pour prouver qu'une suite converge : on montre qu'elle est croissante majorée ou décroissante minorée. Pour une suite définie par récurrence c'est souvent adapté car on a des informations précises sur $u_{n+1} - u_n$, qui vont donc nous dire si la suite est croissante ou décroissante. Lorsqu'une suite converge vers une limite non nulle, un équivalent simple va être cette limite. Ici la suite converge vers 0 donc il faut étudier un peu plus le problème. Pour trouver un équivalent, on écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} &= \frac{1}{\sin(u_n)^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{(u_n - u_n^3/6 + o(u_n^3))^2} - \frac{1}{u_n^2} \\ &= \frac{1}{u_n^2} \left(\frac{1}{(1 - u_n^2/6 + o(u_n^2))^2} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{u_n^2} (1 + u_n^2/3 + o(u_n^2) - 1) \\ &= \frac{1}{3} + o(1) \end{aligned}$$

Je suis sympa, je vais détailler le passage avec les o :

On a montré que $(u_n)_n$ tend vers 0. On pose $v_n = -u_n^2/6 + o(u_n^2)$ (où le $o(u_n^2)$ est celui ci-dessus). Ainsi $(v_n)_n$ tends vers 0. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 - u_n^2/6 + o(u_n^2))^2} - 1 &= (1 + v_n)^{-2} - 1 \\ &= 1 - 2v_n + o(v_n) - 1 = -2v_n + o(v_n) \\ &= u_n^2/3 + o(u_n^2) + o(v_n) \end{aligned}$$

L'important pour poursuivre est d'avoir $o(v_n) = o(u_n^2)$. Je précise ici car il arrive qu'on doive pousser le développement limité plus loin. On a $o(v_n) = \epsilon_n v_n$ où ϵ_n tend vers 0 (par définition). Alors $o(v_n) = -\epsilon_n u_n^2/6 + \epsilon_n o(u_n^2) = u_n^2(-\epsilon_n/6 + \epsilon_n o(1))$ donc on a bien $o(v_n) = o(u_n^2)$.

On a alors

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{3} + o(1)$$

Par théorème de sommation des équivalents (voir plus bas si besoin), on obtient l'équivalent

$$\frac{1}{u_n^2} \sim \frac{n}{3}$$

et finalement $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$ car les équivalents sont compatibles avec les puissances.

Et là je vous vois venir : "Hein ? Mais comment on peut penser à regarder $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$!" Et vous avez bien raison ! Preuve à l'appui, si je vous demande un équivalent mais cette fois avec $f(x) = \log(1+x)$ au lieu de la fonction sinus, y arriverez-vous ? $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$ ne permettra pas d'y arriver ici. En plus, ça peut largement être une question du jury si vous présentez ce développement avec la fonction sinus. Il y a beaucoup plus intéressant à faire ici que de bachôter et d'apprendre par coeur "l'astuce". Si ça peut vous rassurer, je n'ai pas du tout réussi cet exercice la première fois que je l'ai essayé et je me suis senti vraiment nul lorsque j'ai lu la correction du Gourdon qui félicitait ceux qui ont trouvé l'astuce (et effectivement, grand bravo si vous avez trouvé), comme si c'était quelque chose qui tombait du ciel et que seule une profonde intuition permettait d'y penser. En vérité, le coeur de la preuve nous a été caché, tel un prestidigitateur qui ne révèle pas ses secrets pour impressionner la foule. Je vais essayer maintenant de vous révéler ces secrets en présentant même plusieurs approches au problème, les plus naturelles possibles. Tout d'abord, il faut connaître le résultat suivant qui permet par exemple de donner un équivalent d'une suite en faisant le lien avec des séries :

Théorème

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles, positives telles que $u_n \sim v_n$. Alors :

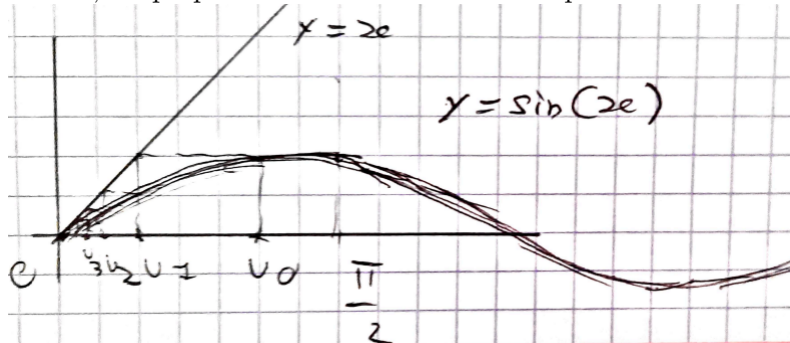
- *Si la série $\sum u_n$ converge, on a $\sum_{k \geq n} u_k \sim \sum_{k \geq n} v_k$ (équivalence des restes)*
- *Si la série $\sum u_n$ diverge, on a $\sum_{k=1}^n u_k \sim \sum_{k=1}^n v_k$ (équivalences des sommes partielles)*

On a l'analogue pour les relations de domination et de négligeabilité, et l'analogue pour les intégrales.

C'est ce théorème qu'on a utilisé plus haut, plus précisément le deuxième item. Il permet de donner un équivalent de certaines suites en faisant le lien avec les séries via la suite télescopique $(u_{n+1} - u_n)_n$. C'est d'autant plus

intéressant lorsque $(u_n)_n$ est définie par récurrence d'ordre 1 car on a une description précise de $u_{n+1} - u_n$. C'est aussi ce théorème qu'on utilise lorsqu'on donne le développement asymptotique de la série harmonique (avec la méthode usuelle, pas d'Euler-Maclaurin), et j'ai même dû l'utiliser pendant mon oral de modélisation (Option A) pour donner un équivalent d'une suite d'espérance ! On cherche donc à connaître un équivalent de $(u_{n+1} - u_n)_n$ et à utiliser le théorème ci-dessus pour se ramener à $(u_n)_n$.

Revenons à notre problème de départ. Il est impératif de faire un dessin avant toute chose. Ceci s'applique à beaucoup d'autres situations, comme par exemple la méthode de Newton, de la sécante, algorithmes de gradient, théorème de réarrangement de Riemann, jauge d'un convexe... car c'est le dessin qui donne le cheminement de la preuve, qui fait naître les idées, et qui donne même parfois directement l'intuition du résultat. Le plus flagrant c'est le théorème de réarrangement de Riemann, qui est un résultat spectaculaire, et qui pourtant semble évident lorsqu'on utilise un dessin.



Ici, sur le dessin, on voit que la suite $(u_n)_n$ tend vers 0 à une vitesse assez lente. On a vu que c'est effectivement le cas, avec une vitesse de l'ordre de $\sqrt{n}$.

Dans le cas de la fonction sinus, on a

$$u_{n+1} = \sin(u_n) = u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$$

car $(u_n)_n$ tend vers 0. On a donc, puisqu'on s'intéresse à $u_{n+1} - u_n$,

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$$

donc l'équivalent $u_{n+1} - u_n \sim -\frac{u_n^3}{6}$. Or, on a pas encore d'équivalent de u_n car c'est ce qu'on cherche... Ici, je vois deux manières assez naturelles de s'en sortir. Il en existe deux autres qui marchent mais qui me paraissent moins bonnes, donc je les présenterai en dernier.

— Première méthode : Le point de vue géométrique

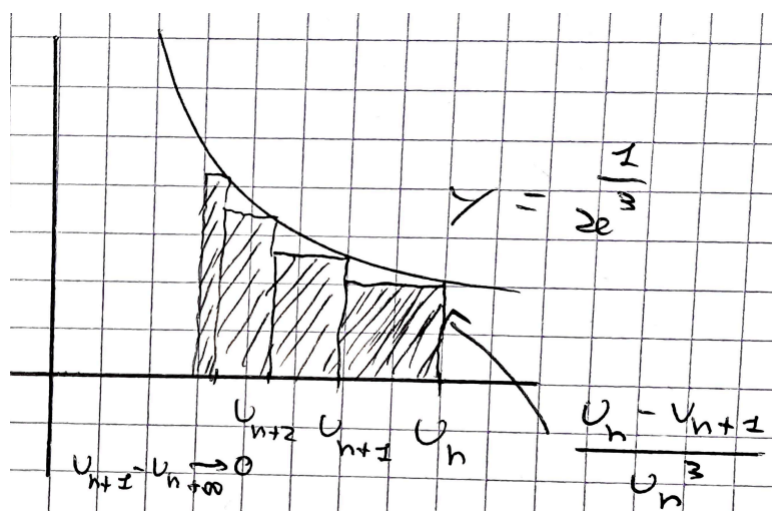
Dans notre démarche, le u_n^3 est ce qui nous gêne pour l'obtention d'un

équivalent. Nous allons donc simplement diviser par u_n^3 pour obtenir cette fois un équivalent. Il faut d'abord justifier que la suite $(u_n)_n$ ne s'annule pas, et je le ferai plus tard dans un cas plus général. Admettons. On obtient :

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n^3} = -\frac{1}{6} + o(1)$$

donc l'équivalent $\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n^3} \sim -\frac{1}{6} \iff \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^3} \sim \frac{1}{6}$.

Mais le terme de gauche dans l'équivalent a une interprétation géométrique bien précise :



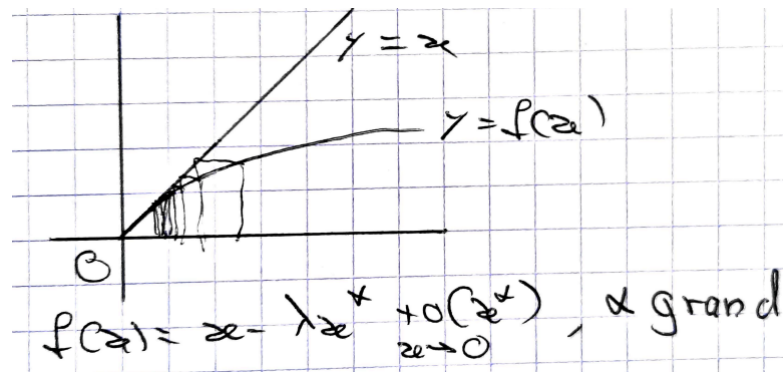
Le fait que le pas $u_{n+1} - u_n$ tende vers 0 nous donne l'intuition que l'aire du rectangle donnée par $\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^3}$ va être équivalente à l'intégrale $\int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{x^3} dx$. Mais cette intégrale se calcule et donne :

$$\int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \right)$$

apparaît alors cette astuce magique ! On intuite donc l'équivalent $\frac{1}{u_{n+1}^2} -$

$\frac{1}{u_n^2} \sim \frac{1}{3}$ après avoir multiplié par 2, et on a effectivement vérifié que c'était vrai avant. C'était ici le coeur du problème, de la difficulté de l'exercice, le fameux secret du magicien, et c'est ce que je j'entendais lorsque je disais que les corrections dans les livres sont souvent incomplètes. Maintenant, vous devriez être capable de faire la même chose pour $f(x) = \log(1+x)$. En fait, ceci se généralise à toute fonction qui admet un développement asymptotique en 0 du

type $f(x) = x - \lambda x^\alpha + o(x^\alpha)$ où $\alpha > 1, \lambda > 0$, et la démarche est exactement la même. Nous le ferons juste après (je n'aurais presque qu'à copier/coller ce que j'ai déjà écrit). On remarquera aussi plus tard que plus α est grand, plus la courbe de f va coller à $y = x$ au voisinage de 0, et plus la vitesse de convergence vers 0 sera lente. Pour sinus, par exemple, $\alpha = 3$ et la vitesse de convergence est de l'ordre de $\sqrt{n}$. Pour $f(x) = \log(1+x)$, $\alpha = 2$ et la vitesse de convergence est de l'ordre de n . Cela se voit très bien sur un dessin :



Deuxième méthode : l'équation différentielle

Cette méthode me semble meilleure que la première car plus naturelle (vous pouvez ne pas être d'accord), mais je n'ai aucune référence qui présente cette méthode, donc je la présente en deuxième. C'est un de mes professeurs qui m'a donné quelques pistes que j'ai approfondies de mon côté. Mais il en existe peut-être, je ne peux pas avoir fouillé tous les livres. Reprenons au même point que dans la première méthode :

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$$

En fait, $u_{n+1} - u_n$ est un taux d'accroissement car on peut l'écrire $\frac{u_{n+1} - u_n}{n+1 - n}$. On peut donc rapprocher l'égalité ci-dessus à l'équation différentielle $y' = -\frac{y^3}{6}$ dans le sens où la suite $(u_n)_n$ et la solution de l'équation différentielle ci-dessus devraient ne pas être bien éloignées au vu de $u_{n+1} - u_n = -\frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$. Plus précisément, la suite $(u_n)_n$ devrait être proche des valeurs en les entiers de la solution non nulle de cette équation différentielle (on ignore les constantes car on veut juste l'intuition). Il est possible de déterminer la (une) solution explicite de cette équation différentielle : elle est donnée par $y(x) = \sqrt{\frac{3}{x}}$, et on retrouve l'équivalent final $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$. Cependant, cela ne donne pas la méthode pour démontrer rigoureusement l'équivalent, et ne fait pas apparaître "l'astuce magique". Pour y arriver, on écrit $y' = -\frac{y^3}{6} \iff \frac{y'}{y^3} = -\frac{1}{6}$. y ne s'annule jamais car n'est pas la solution

nulle (Cauchy-Lipschitz). Mais $\frac{y'}{y^3} = (-\frac{1}{2}\frac{1}{y^2})'$ et c'est là TOUT le truc. Car actuellement, en faisant l'analogie avec le cas discret, on est entrain de dire qu'en fait $\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n^3}$ et $-\frac{1}{2}(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2})$ c'est quasiment la même chose ! Sauf qu'en regardant les suites ça ne se voit pas du tout, alors qu'en regardant l'équation différentielle, avec un peu d'aisance dans le calcul de dérivées, ça saute aux yeux. Et si vous avez été attentif, c'est exactement ce qu'on a montré dans la première méthode, mais géométriquement. Donc dans cette méthode on fait les mêmes calculs que dans la première, mais pourtant la démarche est bien différente. On arrive au même point que précédemment car on veut montrer rigoureusement, après en avoir eu l'intuition, que $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \sim \frac{1}{3}$.

Remarque : Ces deux méthodes s'appliquent souvent dans de tels exercices. Parfois une s'applique mieux que l'autre. Je vous montrerai ça à la fin.

Troisième méthode : On cherche la puissance qui va bien

Ici on s'inspire de la correction en se disant qu'en fait on cherche une puissance β telle que $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ nous arrange bien. Pour la fonction sinus, $\beta = -2$. Retrouvons ce -2 par le calcul.

On a $u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$. On élève à la puissance β :

$$u_{n+1}^\beta = (u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3))^\beta = u_n^\beta (1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2))^\beta$$

Comme $(u_n)_n$ tends vers 0 un DL donne

$$u_{n+1}^\beta = u_n^\beta (1 - \frac{\beta u_n^2}{6} + o(u_n^2)) = u_n^\beta - \frac{\beta u_n^{\beta+2}}{6} + o(u_n^{\beta+2})$$

Donc

$$u_{n+1}^\beta - u_n^\beta = -\frac{\beta}{6} u_n^{\beta+2} + o(u_n^{\beta+2})$$

Ce qui gêne pour avoir un équivalent de $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ c'est le $u_n^{\beta+2}$ dans le terme de droite car on n'a pas d'équivalent de u_n à ce stade. Donc on va simplement éliminer ce terme en prenant $\beta = -2$ et le tour est joué.

Vous disposez maintenant de 3 méthodes pour résoudre ce problème. Essayez d'appliquer ces 3 méthodes à $f(x) = \log(1+x)$ pour voir si vous avez bien compris. Essayez aussi de faire cet exercice, que je corrigerai à la fin :

Exercice

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par récurrence par

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = u_n + e^{-u_n} \end{cases}$$

Montrer que $(u_n)_n$ tends vers $+\infty$ et donner un équivalent. Je précise que la situation ici est différente de ce qu'on a vu jusque là.

Quatrième méthode : l'intuition approximative

Voici une autre approche possible, mais qui me convainc moins. Je vais passer rapidement dessus. Elle consiste à remarquer que comme $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0, les termes consécutifs de la suite sont très proches les uns des autres à partir d'un certain rang. Ainsi, quand on regarde $\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n^3}$, on a l'approximation :

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n^3} = \frac{u_{n+1}}{u_n^3} - \frac{u_n}{u_n^3} = \frac{u_{n+1}}{u_n^3} - \frac{1}{u_n^2} \approx \frac{u_{n+1}}{u_{n+1}^3} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$$

L'approximation est assez moyenne car il manque le facteur $\frac{1}{2}$ qu'on a vu avant, mais elle a le mérite de nous faire nous intéresser de plus près à $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$, et au final de réussir l'exercice.

Après cette introduction sur l'exemple très instructif de la fonction sinus, on va passer au cas général qui constituera l'essentiel du développement. Quand on regarde de près les démarches que nous avons faites précédemment, on se rend compte que la fonction sinus en elle-même n'a rien de spécial, et que seuls son DL en 0, des propriétés de croissance et de positivité nous ont permis d'avancer. Les démarches vont s'appliquer aux fonctions dont la courbe admet pour tangente la droite $y = x$ en 0 et qui est en dessous de la droite $y = x$ sur un voisinage de 0 (voir les dessins faits précédemment). Ceci justifie l'énoncé du développement que je vais donner et qu'on retrouve dans le Bernis. A première vue cet énoncé est repoussant, mais ne vous laissez pas impressionner car il n'y a rien de difficile, surtout si vous avez compris ce qu'on a fait jusque là.

Développement

Théorème

Soient un réel $b > 0$ et f une application de $[0, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que

1. f est continue
2. f est croissante
3. Pour tout $x \in]0, b]$, $f(x) < x$ et $f(0) = 0$
4. Il existe un réel $\lambda > 0$ et un réel $r > 1$ tels que f admette le DL en 0 :

$$f(x) = x - \lambda x^r + o(x^r)$$

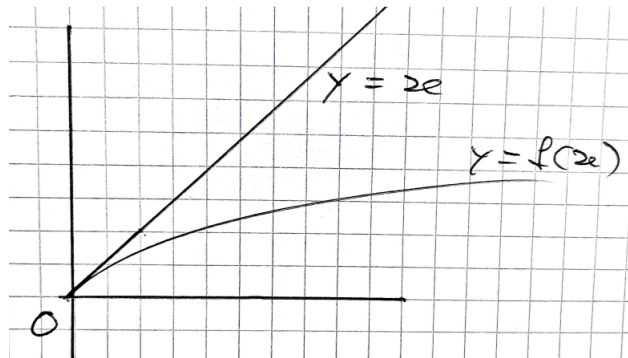
Soit $(u_n)_n$ la suite définie par la récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0 = c \in]0, b[\\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Alors, la suite $(u_n)_n$ est bien définie, converge vers 0 et on a l'équivalent :

$$u_n \sim (n\lambda(r-1))^{\frac{1}{1-r}}$$

Les 4 hypothèses ont pour but de décrire une fonction qui ressemble à ça :



$r = 3$ et $\lambda = \frac{1}{6}$ redonnent l'équivalent trouvé avec la fonction sinus. On peut alors voir une remarque que j'avais faite plus tôt : plus r est grand, plus la convergence vers 0 est lente. (Et réciproquement, plus r est proche de 1, plus la convergence est rapide).

Autre remarque : je ne l'ai pas fait au début du document mais il faudra bien tout démontrer ici, tout justifier. Je suis tombé sur ce développement à l'oral d'analyse (leçon 224) et je n'ai jamais pris le temps pendant l'année de démontrer que la suite (u_n) ne s'annule pas. J'ai été cuisiné là-dessus pendant bien 15 minutes car je n'arrivais pas à trouver l'argument, et un membre du jury pensait que les hypothèses de l'énoncé n'étaient pas assez fortes et qu'il fallait en rajouter. Un vrai bazar, finalement les hypothèses suffisent comme on le verra. J'en profite pour vous rappeler de ne jamais baisser les bras : je pensais me taper une sale note à cause de ce début désastreux mais le jury m'a mis 15/20 donc j'étais vraiment très content !

Je propose dans ce développement la preuve du Bernis, qui correspond à la méthode géométrique. Ensuite, on le fera avec la méthode de l'équation différentielle et je vous laisserai le faire avec la troisième méthode (puissance β), et la quatrième si vous voulez. Si jamais vous bloquez le jour J vous pourrez toujours faire la 3ème méthode justement qui est plus facile que les deux premières, mais moins instructive.

Démonstration

Montrons que la suite (u_n) est bien définie et converge vers 0 :

Pour tout $x \in]0, b]$, on a $f(x) < x$ donc $f(x) \in [0, b]$. On a aussi $f(0) = 0$. Donc l'intervalle $[0, b]$ est stable par f et la suite est bien définie. On a de plus que la suite (u_n) est positive. Ensuite, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} =$

$f(u_n) \leq u_n$ d'après l'hypothèse 3, donc la suite (u_n) est décroissante. Elle est décroissante, minorée par 0, donc converge vers un réel $l \in [0, b]$ qui sera point fixe de f car f est continue. Or, comme $f(x) < x$ pour $x \neq 0$, on a forcément $l = 0$.

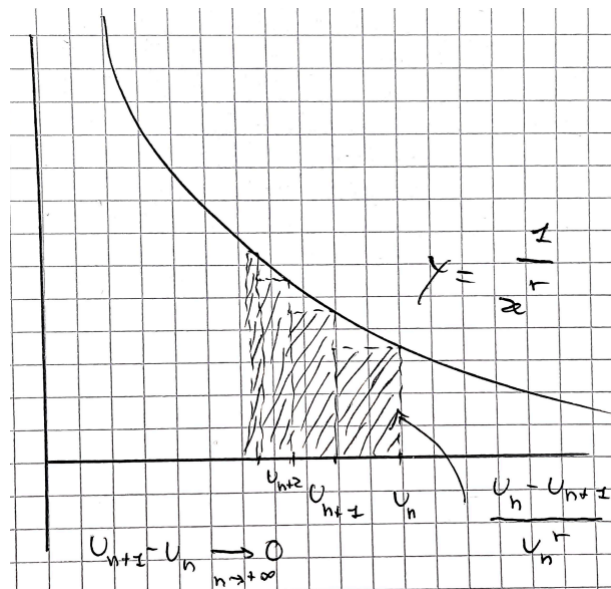
Remarque : un membre du jury m'a demandé après le développement : "Pouvez-vous dire précisément où intervient chaque hypothèse ?" (Je rappelle qu'on cherchait s'il manquait une hypothèse pour avoir que (u_n) ne s'annule pas).

Passons à l'équivalent. L'hypothèse 4 donne $u_{n+1} = u_n - \lambda u_n^r + o(u_n^r)$ donc $u_{n+1} - u_n = -\lambda u_n^r + o(u_n^r)$. On veut diviser par u_n^r pour obtenir un équivalent. Justifions que (u_n) ne s'annule pas. Supposons par l'absurde qu'il existe n tel que $u_n = 0$. Alors, pour tout $x \in [0, u_n]$, on aurait $0 \leq f(x) \leq f(u_n) = 0$ donc f serait nulle sur $[0, u_n]$. Or, f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 : $f(x) = x + o(x)$ (car $r > 1$). On sait que l'existence d'un DL à l'ordre 1 de la forme $a_0 + a_1 x + o(x)$ équivaut à dire que f est dérivable en 0 avec $f(0) = a_0$ et $f'(0) = a_1$. Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$ (c'est faux au delà de l'ordre 1, cf Gourdon). On obtient une contradiction car si f est nulle dans un voisinage de 0, sa dérivée en 0 est nulle.

En divisant par u_n^r , on a alors

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n^r} = -\lambda + o(1)$$

Donc l'équivalent $\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n^r} \sim -\lambda \iff \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^r} \sim \lambda$. Mais le terme de gauche a une interprétation géométrique bien précise :



Le fait que le pas $u_{n+1} - u_n$ tende vers 0 nous donne l'intuition que l'aire du

rectangle donnée par $\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^r}$ va être équivalente à l'intégrale $\int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{x^r} dx$.
 Mais cette intégrale se calcule et donne :

$$\int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{x^r} dx = \frac{1}{1-r} (u_n^{1-r} - u_{n+1}^{1-r})$$

Ce qui donnerait l'équivalent, après multiplication par $r - 1$:

$$u_{n+1}^{1-r} - u_n^{1-r} \sim -\lambda(1-r) = \lambda(r-1)$$

Vérifions ceci rigoureusement :

$$\begin{aligned} u_{n+1}^{1-r} - u_n^{1-r} &= f(u_n)^{1-r} - u_n^{1-r} = (u_n - \lambda u_n^r + o(u_n^r))^{1-r} - u_n^{1-r} \\ &= u_n^{1-r} (1 - \lambda u_n^{r-1} + o(u_n^{r-1}))^{1-r} - u_n^{1-r} \\ &= u_n^{1-r} (1 - (1-r)\lambda u_n^{r-1} + o(u_n^{r-1})) - u_n^{1-r} \\ &= u_n^{1-r} - (1-r)\lambda + o(1) - u_n^{1-r} = (r-1)\lambda + o(1) \end{aligned}$$

Et nous avons bien l'équivalent annoncé. Comme on a $r > 1, \lambda > 0$ et $u_{n+1}^{1-r} - u_n^{1-r} > 0$, on peut appliquer le théorème de sommation des équivalents pour des séries à termes généraux positifs et équivalents. Ceci donne, par somme télescopique,

$$u_n^{1-r} - u_0^{1-r} \sim \sum_{k=0}^{n-1} (r-1)\lambda = n\lambda(r-1)$$

Or, comme $r > 1$, on a $u_n^{1-r} - u_0^{1-r} \sim u_n^{1-r}$ d'où finalement

$$u_n^{1-r} \sim n\lambda(r-1)$$

et en prenant la puissance $\frac{1}{1-r}$ (opération compatible avec les équivalents) :

$$u_n \sim (n\lambda(r-1))^{\frac{1}{1-r}}$$

Ce qui termine la preuve.

Ceci n'est pas assez long pour faire un développement. Je vous laisse regarder le Bernis pour regarder une suite possible. Il est proposé par exemple le s'intéresser au cas $f(x) = \log(1+x)$ et d'obtenir un terme de plus dans le développement asymptotique. On peut le faire aussi avec la fonction sinus, le principe est en tout point le même.

Faisons maintenant la preuve avec l'approche de la méthode 2.

Démonstration (Version 2)

Reprenons à $u_{n+1} - u_n = -\lambda u_n^r + o(u_n^r)$. Comme tout à l'heure, on se dit que la suite (u_n) va être proche de la suite $(y(n))$ où y est une solution non nulle de l'équation différentielle $y' = -\lambda y^r$. Or, une telle solution est donnée par

$$y(x) = (\lambda(r-1))^{\frac{1}{1-r}} x^{\frac{1}{1-r}}$$

ce qui donne tout de suite l'équivalent souhaité, mais de manière non rigoureuse. Faisons le rigoureusement. l'équation différentielle $y' = -\lambda y^r$ équivaut à $\frac{y'}{y^r} = -\lambda$ (y ne s'annule pas car c'est la solution non nulle, cf Cauchy-Lipschitz). Mais

$$\frac{y'}{y^r} = \left(-\frac{1}{r-1} \frac{1}{y^{r-1}}\right)'$$

Revenant au cas discret, on est entrain de dire qu'en fait $\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n^r}$ et $-\frac{1}{r-1} \left(\frac{1}{u_{n+1}^{r-1}} - \frac{1}{u_n^{r-1}}\right)$ c'est quasiment la même chose. Or, on a l'équivalent

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n^r} \sim -\lambda$$

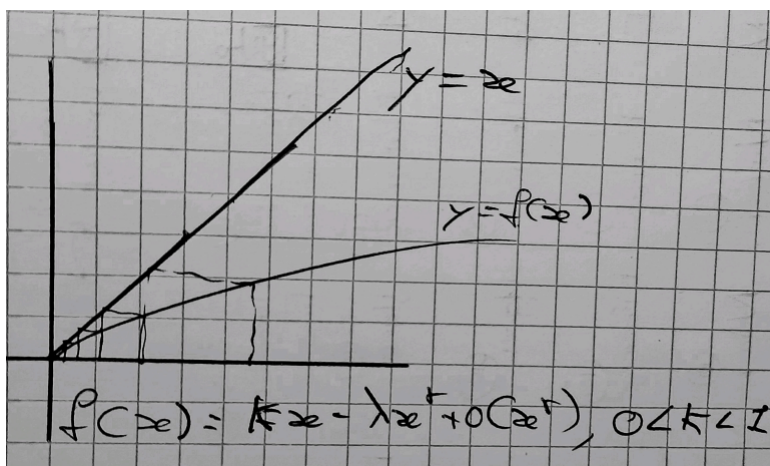
Donc, au vu de ce qui précède, on intuite l'équivalent

$$\frac{1}{u_{n+1}^{r-1}} - \frac{1}{u_n^{r-1}} \sim \lambda(r-1)$$

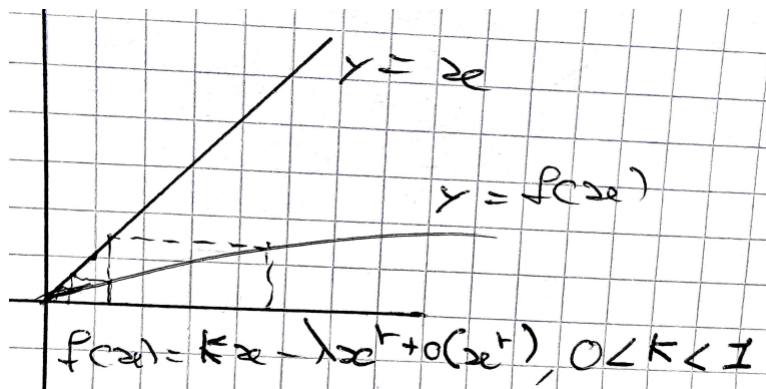
Et on refait exactement ce qu'on a fait dans le développement au dessus.

Quelques résultats supplémentaires

Nous allons maintenant nous intéresser à deux problèmes voisins. Le premier correspond à la situation dans laquelle la fonction f vérifie toutes les hypothèses du théorème précédent mais dont la dérivée en 0 est strictement comprise entre 0 et 1. Par exemple, $f(x) = \frac{1}{2}\sin(x)$ ou $f(x) = K\sin(x)$, $0 < K < 1$ de manière générale. On a encore la convergence vers 0 et on veut donner un équivalent. Essayons d'intuiter ce qu'il va se passer.



On observe une convergence bien plus rapide, et d'autant plus rapide que K est proche de 0 :



Essayons d'appliquer les méthodes précédentes. On part, comme d'habitude, de

$$u_{n+1} = Ku_n - \lambda u_n^r + o(u_n^r)$$

Cette fois, on ne voit pas de taux d'accroissement apparaître comme avant et $\frac{u_{n+1} - Ku_n}{u_n^r}$ n'a pas la même interprétation géométrique. Cependant, il y a ici une démarche qui est bien plus facile que dans le cas du développement mais qu'on ne pouvait pas appliquer. On avait dans le cas précédent

$$u_{n+1} = u_n - \lambda u_n^r + o(u_n^r)$$

donc, comme $r > 1$,

$$u_{n+1} = u_n + o(u_n)$$

En divisant par u_n on a alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \sim 1$$

Si on pouvait prendre le Log, on pourrait ensuite sommer les équivalents et repasser à l'exponentielle pour avoir notre équivalent souhaité. Mais on ne peut pas passer au Log dans l'équivalent à cause du 1 ! Donc cette démarche n'était pas concluante ici. En plus, on a bien vu l'importance du deuxième terme du développement asymptotique de f en 0, qui n'apparaît plus dans ce qu'on vient de faire. Par contre, avec

$$u_{n+1} = Ku_n - \lambda u_n^r + o(u_n^r)$$

on obtient

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = K + o(1)$$

donc l'équivalent

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \sim K$$

Et K étant entre 0 et 1 strictement, on peut passer au log dans l'équivalent, ce qui donne

$$\log(u_{n+1}) - \log(u_n) \sim \log(K)$$

Les deux termes de gauches et de droites sont équivalents et de signe constant négatif. Donc les sommes partielles sont équivalentes car on est dans le cas d'une divergence :

$$\log(u_n) - \log(u_0) \sim \log(K)n$$

D'où

$$\log(u_n) = \log(u_0) + \log(K)n + o(n)$$

En passant à l'exponentielle on obtient

$$u_n = u_0 K^n e^{o(n)}$$

Pour conclure à un équivalent

$$u_n \sim u_0 K^n$$

qui est convenable par rapport à notre intuition, il faudrait avoir $o(n) = o(1)$. Mais rien ne l'assure ici. Donc il faut pousser le développement asymptotique plus loin pour "décortiquer" ce $o(n)$. Il faut remonter les calculs pour voir d'où vient ce $o(n)$, et voir à quel endroit on peut préciser les choses. On en arrive à s'intéresser à

$$\log(u_{n+1}) - \log(u_n) \sim \log(K)$$

Ainsi, on aimerait préciser cet équivalent, donc on va s'intéresser à $\log(u_{n+1}) - \log(u_n) - \log(K)$.

$$\begin{aligned} \log(u_{n+1}) - \log(u_n) - \log(K) &= \log\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) - \log(K) \\ &= \log\left(\frac{Ku_n - \lambda u_n^r + o(u_n^r)}{u_n}\right) - \log(K) \\ &= \log(K) + \log\left(1 - \frac{\lambda}{K}u_n^{r-1} + o(u_n^{r-1})\right) - \log(K) \\ &= \log(K) - \frac{\lambda}{K}u_n^{r-1} + o(u_n^{r-1}) - \log(K) \\ &= -\frac{\lambda}{K}u_n^{r-1} + o(u_n^{r-1}) \end{aligned}$$

ce qui donne l'équivalent

$$\log(u_{n+1}) - \log(u_n) - \log(K) \sim -\frac{\lambda}{K}u_n^{r-1}$$

On a quelque chose de plus précis que tout à l'heure, même si u_n apparaît. On va quand même essayer de sommer les équivalents comme tout à l'heure lorsqu'on avait

$$\log(u_{n+1}) - \log(u_n) \sim \log(K)$$

Il faut savoir si la série $\sum u_n^{r-1}$ converge ou diverge. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} K$$

et $K < 1$ donc d'après le critère de D'Alembert (la suite $(u_n)_n$ est positive), on a que la série $\sum u_n^{r-1}$ converge. Le théorème de sommation des équivalents s'applique alors aux restes et pas aux sommes partielles, et ne donne rien. Cependant, on a montré que la série de terme général $w_n = \log(u_{n+1}) - \log(u_n) - \log(K)$ est convergente, par équivalence. Notons S la somme de cette série. On a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} w_k = \sum_{k=0}^{n-1} \log(u_{k+1}) - \log(u_k) - \log(K) = \log(u_n) - \log(u_0) - n \log(K)$$

Mais on peut écrire

$$\sum_{k=0}^{n-1} w_k = S - R_n = S + o(1)$$

où R_n est le reste d'ordre n , qui est un $o(1)$ car la série converge. Ce qui nous donne

$$\log(u_n) = \log(u_0) + n \log(K) + S + o(1)$$

et ce $o(1)$ nous permet de conclure : nous avons bien "décortiquer" le $o(n)$. Finalement, en prenant l'exponentielle dans

$$\log(u_n) = \log(u_0) + n \log(K) + S + o(1)$$

on obtient

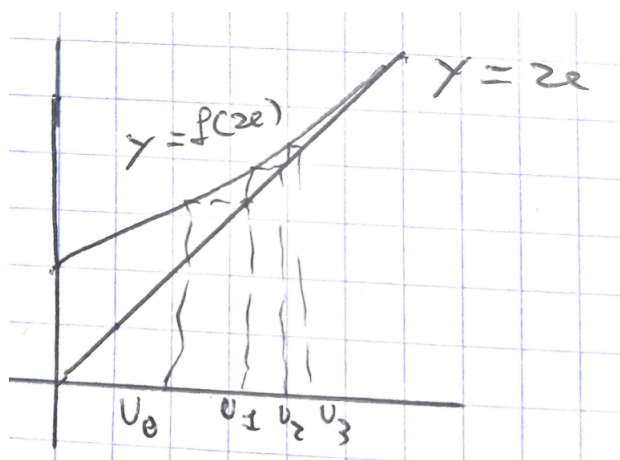
$$u_n = u_0 e^S K^n e^{o(1)}$$

D'où l'équivalent

$$u_n \sim u_0 e^S K^n$$

et on a ce qu'on a intuité au début sur le dessin.

Le deuxième problème voisin que j'aimerais traiter ici est celui qui correspond à la situation suivante :



i.e. le cas où la fonction f colle à la droite $y = x$ à l'infini, par exemple $f(x) = x + e^{-x}$ ou $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$, etc... On observe sur le dessin une divergence vers $+\infty$ (ou $-\infty$ selon que f est en dessous ou au dessus de $y = x$) assez lente. Je ne vais faire que quelques exemples particuliers à défaut d'avoir trouvé l'étude d'un cas général. Commençons par $f(x) = x + e^{-x}$. Le terme initial u_0 de la suite est un réel quelconque, $(u_n)_n$ est définie par récurrence comme d'habitude.

Montrons que $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$:

La relation $u_{n+1} - u_n = e^{-u_n}$ montre que la suite est croissante. Si elle était majorée, elle convergerait vers un réel l qui va alors vérifier l'équation $l = l + e^{-l}$ ce qui est une contradiction. Donc $(u_n)_n$ est croissante non majorée et tend vers $+\infty$.

Trouvons un équivalent.

On applique le raisonnement de la méthode 1, mais je ne mets plus de dessin car j'en ai un peu marre, le document devient vraiment très long. On a pour tout n :

$$(u_{n+1} - u_n)e^{u_n} = 1$$

Mais le terme de gauche correspond géométriquement à l'aire d'un rectangle, et le dessin nous intuite que cette aire est équivalente à $\int_{u_n}^{u_{n+1}} e^x dx$.

Mais cette intégrale se calcule et donne $e^{u_{n+1}} - e^{u_n}$. On intuite alors l'équivalent $e^{u_{n+1}} - e^{u_n} \sim 1$ et nous sommes invités à regarder la suite $(e^{u_n})_n$. Vérifions ceci rigoureusement. On a

$$\begin{aligned} e^{u_{n+1}} - e^{u_n} &= e^{u_n + e^{-u_n}} - e^{u_n} \\ &= e^{u_n} e^{e^{-u_n}} - e^{u_n} \\ &= e^{u_n} (1 + e^{-u_n} + o(e^{-u_n})) - e^{u_n} \\ &= 1 + o(1) \end{aligned}$$

où le développement asymptotique vient du fait que e^{-u_n} tends vers 0. On a donc bien cet équivalent. Par théorème de sommation des équivalents, on

en déduit que

$$e^{u_n} \sim n$$

et on peut passer au log dans l'équivalent car les termes ne sont pas proches de 1, ce qui donne

$$u_n \sim \log(n)$$

Une divergence très très lente ! Pour avoir les autres termes du développement asymptotique, il faut chercher l'endroit où on a eu le premier équivalent et pousser plus loin, donc il faut aller un cran plus loin dans le développement asymptotique de $e^{e^{-u_n}}$. Ceci donne

$$e^{u_{n+1}} - e^{u_n} = 1 + e^{-\frac{u_n}{2}} + o(e^{-u_n})$$

Donc

$$e^{u_{n+1}} - e^{u_n} - 1 \sim \frac{e^{-u_n}}{2} \sim \frac{1}{2n}$$

vu ce qui précède. La série harmonique étant divergente et équivalente à $\log(n)$, par sommation des équivalents on obtient

$$e^{u_n} - n \sim \frac{1}{2} \log(n)$$

donc

$$e^{u_n} = n + \frac{1}{2} \log(n) + o(\log(n))$$

En passant au log, on a

$$\begin{aligned} u_n &= \log\left(n + \frac{1}{2} \log(n) + o(\log(n))\right) \\ &= \log(n) + \log\left(1 + \frac{1}{2} \frac{\log(n)}{n} + o\left(\frac{\log(n)}{n}\right)\right) \\ &= \log(n) + \frac{1}{2} \frac{\log(n)}{n} + o\left(\frac{\log(n)}{n}\right) \end{aligned}$$

Ce qui donne le deuxième terme. Et on peut continuer comme ça pour avoir les termes les uns après les autres mais ça devient de plus en plus calculatoire. Remarquons qu'ici la méthode 3 ne s'applique pas, car ce qu'il faut étudier c'est $e^{u_{n+1}} - e^{u_n}$ donc pas de $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$. On pouvait par contre appliquer la méthode 2 : on rapproche l'écriture

$$u_{n+1} - u_n = e^{-u_n}$$

et l'équation différentielle $y' = e^{-y}$ qui équivaut à $y'e^y = 1$. Mais $y'e^y = (e^y)'$, donc en revenant au cas discret on est entrain de dire que $(u_{n+1} - u_n)e^{u_n}$ et $e^{u_{n+1}} - e^{u_n}$ c'est quasiment la même chose. Ce qui intuite l'équivalent $e^{u_{n+1}} - e^{u_n} \sim 1$ et on en est au même point que précédemment.

Maintenant, voyons une situation qui met en défaut la méthode 2. On considère la fonction $f(x) = x + e^{-x^2}$. Si vous le sentez venir, le problème viendra du fait qu'on ne connaît pas de primitive simple de e^{-x^2} . On montre d'abord exactement comme avant que la suite définie comme d'habitude tend vers 0. On rapproche l'écriture

$$u_{n+1} - u_n = e^{-u_n^2}$$

et l'équation différentielle $y' = e^{-y^2} \iff e^{y^2} y' = 1$. Mais là, on est bloqué car on ne connaît pas de primitive simple de e^{y^2} . Par contre, la méthode 1 permet de poursuivre :

On a $(u_{n+1} - u_n)e^{u_n^2} = 1$ et l'interprétation géométrique nous donne l'intuition que

$$(u_{n+1} - u_n)e^{u_n^2} \sim \int_{u_n}^{u_{n+1}} e^{x^2} dx$$

On retombe sur le même souci de primitivation de e^{x^2} . Par contre, on sait que des fois on peut donner un équivalent d'une intégrale par intégration par parties et par intégration des relations de comparaison. Regardons. On a

$$\int_{u_n}^{u_{n+1}} e^{x^2} dx = \int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{2xe^{x^2}}{2x} dx = \left[\frac{e^{x^2}}{2x} \right]_{u_n}^{u_{n+1}} + \int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{e^{x^2}}{2x^2} dx$$

Or, on a

$$0 \leq \int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{e^{t^2}}{2t^2} dt \leq \left(\int_{u_n}^{u_{n+1}} e^{t^2} dt \right) \frac{1}{2u_n^2}$$

Donc

$$\int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{e^{x^2}}{2x^2} dx = o \left(\int_{u_n}^{u_{n+1}} e^{x^2} dx \right)$$

Donc on a l'équivalent

$$\int_{u_n}^{u_{n+1}} e^{x^2} dx \sim \left[\frac{e^{x^2}}{2x} \right]_{u_n}^{u_{n+1}} = \frac{e^{u_{n+1}^2}}{2u_{n+1}} - \frac{e^{u_n^2}}{2u_n}$$

et on intuite enfin l'équivalent

$$\frac{e^{u_{n+1}^2}}{2u_{n+1}} - \frac{e^{u_n^2}}{2u_n} \sim 1$$

On étudie rigoureusement cette différence là, puis on somme les équivalents comme d'habitude... Je vous laisse le faire. C'est fait dans Bernis sinon. On trouve

$$u_n \sim \sqrt{\log(n)}$$

C'était prévisible que la divergence serait plus lente que dans le cas précédent, puisque la courbe de la fonction f colle beaucoup plus la droite $y = x$.

Remarque : J'ai eu comme question de jury dans la leçon 224 de déterminer un équivalent en $+\infty$ de la queue de la gaussienne $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$. Il faut faire une IPP convenable et intégrer des relations de comparaison. Je vous rappelle qu'on reconnaît un équivalent si on a $f(x) = g(x) + o(g(x))$ au voisinage du point considéré. Pour les suites ça revient à avoir $u_n = v_n + o(v_n)$.

EDIT TRES IMPORTANT : En fait, je me trompais lorsque j'ai dit que la méthode 2 est en défaut ici car on peut y arriver quand même. Je m'en suis rendu compte plus tard et j'ai pas envie de modifier tout ce que j'ai écrit donc je me corrige ici. On a rapproché $u_{n+1} - u_n = e^{-u_n^2}$ et l'équation différentielle $y' = e^{-y^2}$ qui équivaut à $e^{y^2} y' = 1$. En fait, on ne connaît pas de primitive simple de $e^{y^2} y'$ mais on connaît une primitive sous forme intégrale et ça vous nous permettre de poursuivre. En effet,

$$y'(x)e^{y(x)^2} = \left(y(0)e^{y(0)^2} + \int_0^x y'(t)e^{y(t)^2} dt \right)'$$

Donc en évaluant en $n \in \mathbb{N}$

$$y'(n)e^{y(n)^2} = \left(y(0)e^{y(0)^2} + \int_0^n y'(t)e^{y(t)^2} dt \right)'$$

Mais on sait que $y(n) \approx u_n$ et $y'(n) \approx u_{n+1} - u_n$. On va aussi approcher la dérivée de droite par taux d'accroissement de pas 1. Attention, il y a un abus de notation dans l'écriture de droite avec la dérivée car c'est comme si on écrivait x' pour la dérivée de la fonction $f(x) = x$. Ainsi,

$$\left(y(0)e^{y(0)^2} + \int_0^n y'(t)e^{y(t)^2} dt \right) \approx \left(y(0)e^{y(0)^2} + \int_0^{n+1} y'(t)e^{y(t)^2} dt \right) - \left(y(0)e^{y(0)^2} + \int_0^n y'(t)e^{y(t)^2} dt \right)$$

Or,

$$\left(y(0)e^{y(0)^2} + \int_0^{n+1} y'(t)e^{y(t)^2} dt \right) - \left(y(0)e^{y(0)^2} + \int_0^n y'(t)e^{y(t)^2} dt \right) = \int_n^{n+1} y'(t)e^{y(t)^2} dt$$

Le changement de variable $x = y(t)$ dans la dernière intégrale donne

$$\int_n^{n+1} y'(t)e^{y(t)^2} dt = \int_{y(n)}^{y(n+1)} e^{x^2} dx$$

Mais si on refait l'approximation $y(n) \approx u_n$ on trouve

$$\int_{y(n)}^{y(n+1)} e^{x^2} dx \approx \int_{u_n}^{u_{n+1}} e^{x^2} dx$$

Et en remontant toutes les approximations que nous avons faites depuis le début, on en vient à l'approximation

$$\int_{u_n}^{u_{n+1}} e^{x^2} dx \approx (u_{n+1} - u_n)e^{u_n^2} = 1$$

qui nous ramène au même point que ce qu'on a fait avec la méthode géométrique. On se rend compte qu'en fait depuis le début on s'est évité des problèmes avec la méthode 2 parce qu'on connaissait une primitive simple, ce qui nous permettait de sauter toutes ces étapes. Mais on aurait pu faire exactement le même raisonnement dans les cas précédents jusqu'à arriver au même point que ci-dessus. Si on connaît une primitive simple, alors on peut poursuivre facilement. Sinon, il faut donner un équivalent de l'intégrale qui apparaît. Ainsi, les méthodes 1 et 2 sont aussi efficaces, mais la 1 semble plus simple à mettre en place.

Ainsi s'achève ce que j'avais à raconter sur ce sujet. J'ai relu le document plusieurs fois mais nous ne sommes jamais à l'abri d'erreurs. Peut-être qu'on peut améliorer certains raisonnements aussi, à vous de voir vos préférences. Il y a pas mal d'exos de ce style dans un des X-ENS d'analyse. Entraînez-vous le plus possible à appliquer les méthodes que j'ai proposé ici si elles vous plaisent. Bon courage pour vos révisions, j'espère que ce document vous aidera à voir plus clair sur ce sujet qui est je trouve très obscure dans les livres classiques et même sur internet.