2.2 Théorème de Rouché

Leçons : 245
Références : [AM04] p.243

Lemme 5 (Principe de l'argument) *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et soit $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ non constante. Soit K un compact de Ω à bord régulier, et supposons que f n'a aucun zéro et aucun pôle sur ∂K. Alors on a :*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial K}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = Z - P$$

où $\left\{\begin{array}{l} Z \\ P \end{array}\right.$ *désigne la somme des multiplicités des* $\left\{\begin{array}{l} \textit{zéros} \\ \textit{pôles} \end{array}\right.$ *de f contenus dans K.*

Preuve. Soit $f \in \mathcal{M}(\Omega)$. Soit $a \in \Omega$ un zéro d'ordre fini ou un pôle de f, ainsi il existe $n \in \mathbb{Z}^*$ et g holomorphe sur un voisinage $V_a \subset \Omega$ de a tels que :

$$g(a) \neq 0, \qquad \forall z \in V_a, f(z) = (z-a)^n g(z).$$

On a alors, pour tout $z \in V_a$,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n(z-a)^{n-1}g(z) + (z-a)^n g'(z)}{(z-a)^n g(z)} = \frac{n}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

et comme $g(a) \neq 0$, on a que $\dfrac{g'}{g}$ est holomorphe sur un voisinage $V'_a \subset V_a$ (car g' est holomorphe et g ne s'annule pas sur un voisinage de a) de a. De plus on sait que l'ensemble S des singularités (pôles/zéros) de f est une partie localement fini donc il existe $V''_a \subset V'_a$ ouvert tel que a est la seule singularité de f dans V''_a. On prend finalement $K_a = \overline{B(a,\epsilon_a)} \subset V''_a$, qui est compact et on a $a \in \mathring{K_a}$. On prend γ_a ($= \mathcal{C}(a,\epsilon_a)$) le lacet positif paramétrant le bord de K_a. En appliquant le Théorème des résidus à $\dfrac{f'}{f}$ sur K_a on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(\frac{f'}{f}, a) &= \sum_{b \in S \cap K_a} \mathrm{Res}(\frac{f'}{f}, b) \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_a}\frac{f'}{f}dz \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial K_a}(\frac{n}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)})dz \\
&= n,
\end{aligned}$$

car $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\partial K_a}\frac{1}{z-a}dz = \mathrm{Ind}(\gamma_a, a) = 1$ (car l'on a fait tout pour avec la construction de K_a) et $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\partial K_a}\frac{g'}{g}dz = 0$ car $\frac{g'}{g}$ est holomorphe sur V'_a et γ_a un lacet dans V'_a, donc en rappliquant le Théorème des résidus à $\frac{g'}{g}$ qui est holomorphe et au lacet γ_a, on a ce qu'on veut.

Ainsi on a donc une correspondance bijective entre les singularités de f et les pôles de $\frac{f'}{f}$, en effet, si a est une singularité de f "d'ordre" $n \in \mathbb{Z}$, alors c'est un pôle de $\frac{f'}{f}$ et $\mathrm{Res}(\frac{f'}{f}, a) = n$, inversement si a est un pôle de $\frac{f'}{f}$ alors comme $\frac{f'}{f}$ est holomorphe en dehors de l'ensemble des singularités de f, on a que a est forcément une singularité de f.

Appliquons maintenant le théorème des résidus à $\frac{f'}{f}$ sur K tout entier. On prend γ un lacet paramétrant le bord ∂K (quitte à se restreindre aux composantes connexes de K), on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'}{f}dz &= \sum_{a\in S\cap K}\mathrm{Res}(\frac{f'}{f},a)\\ &= \sum_{a\in K, a \text{ zéro de } f}\mathrm{Res}(\frac{f'}{f},a)+\sum_{a\in K, a \text{ pôle de } f}\mathrm{Res}(\frac{f'}{f},a)\\ &= Z-P\end{aligned}$$

□

Lemme 6 *Soit Ω un ouvert. Soit K un compact de Ω à bord régulier. Posons*

$$\mathcal{U}=\{(f,w)\in\mathcal{H}(\Omega)\times\mathbb{C}\mid f \textit{ est non constante et } w\notin f(\partial K)\}$$

et pour $(f,w)\in\mathcal{U}$, notons $n_K(f,w)$ le nombre de solutions, comptés avec leurs multiplicités, de l'équation $f=w$ dans K.

Paramétrons le bord de K par des lacets $\gamma_1,...,\gamma_m$ orientés positivement relativement à leur composantes connexes dans $\mathring{K}$. Si $(f,w)\in\mathcal{U}$, alors :

$$n_K(f,w)=\sum_{j=1}^m \mathrm{Ind}(f\circ\gamma_j,w).$$

Preuve. Soit $(f,w)\in\mathcal{U}$, on considère l'application $g: z\mapsto f(z)-w$, cette application est holomorphe sur Ω donc n'a pas de pôle et comme $w\notin f(\partial K)$ on a que g n'a pas de zéro sur ∂K. On peut donc appliquer le principe de l'argument à g et on a :

$$\begin{aligned}n_K(f,w)&=\#\{z\in K\mid f(z)=w,\ \text{avec multiplicité}\}\\ &=\#\{z\in K\mid g(z)=0,\ \text{avec multiplicité}\}\\ &=\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial K}\frac{g'(z)}{g(z)}\,\mathrm{d}z\\ &=\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial K}\frac{f'(z)}{f(z)-w}\,\mathrm{d}z\\ &=\frac{1}{2i\pi}\sum_{j=1}^m\int_{\gamma_j}\frac{f'(z)}{f(z)-w}\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

On peut supposer sans perte de généralité que pour tout $j\in[\![1,m]\!]$, on a $\gamma_j:[0,1]\to\mathrm{Im}(\gamma_j)$, et donc :

$$\begin{aligned}n_K(f,w)&=\frac{1}{2i\pi}\sum_{j=1}^m\int_0^1\frac{f'(\gamma_j(x))}{f(\gamma_j(x))-w}\gamma_j'(x)\,\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{2i\pi}\sum_{j=1}^m\int_0^1\frac{(f\circ\gamma_j)'(z)}{(f\circ\gamma_j)(x)-w}\,\mathrm{d}x\\ &=\sum_{j=1}^m\frac{1}{2i\pi}\int_{f\circ\gamma_j}\frac{1}{x-w}\,\mathrm{d}x\\ &=\sum_{j=1}^m\mathrm{Ind}(f\circ\gamma_j,w)\end{aligned}$$

□

Remarque : On considère déjà $w \notin \partial K$ car sinon l'intégrale n'est pas definie, et f non constante, sinon un seul des ensembles de solution est non vide et contient beaucoup de points, et on ne peut pas appliquer le théorème des résidus également.

Lemme 7 (Pour l'homotopie) *Soient γ_0, γ_1 deux lacets dans $\mathbb{C}^*$ vérifiant*

$$\forall t, |\gamma_0 - \gamma_1| < |\gamma_0| + |\gamma_1|,$$

alors γ_0 et γ_1 sont homotopes dans $\mathbb{C}^*$.

Preuve. On commence par montrer que si $\gamma_0, \gamma_1 : J \to \Omega$ ont même origine et extrémité et si tous les segments $[\gamma_0(t), \gamma_1(t)]$ sont contenus dans Ω, alors les lacets sont homotopes dans Ω. Pour cela on considère simplement $H(s,t) = (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t)$.

On montre ensuite que cette propriété s'applique si l'on a simplement $\forall j \in J, |\gamma_0(t) - \gamma_1(t)| < d(\gamma_0(t), \partial\Omega) + d(\gamma_1(t), \partial\Omega)$, ce qui est vrai car cela implique que les segments sont dans Ω.

Finalement nos hypothèses implique que l'on a la dernière hypothèse. $\square$

Théorème 8 (de Rouché) *Soit Ω un ouvert. Soient $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Soit K un compact de Ω à bord régulier (pouvant être paramétré par une courbe régulière). On suppose que l'on a :*

$$\forall z \in \partial K, |f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|.$$

Alors f et g ont le même nombre de zéros dans K (comptés avec leurs multiplicités).

Preuve. La condition $|f - g| < |f| + |g|$ entraîne que ni g, ni f ne s'annule sur ∂K (sinon pas de relation stricte). Comme K est compact (on considère les composantes connexes, en nombre fini par compacité, et leurs bords) on peut prendre $\gamma_1, ..., \gamma_m$ qui paramètrent ∂K. On définit pour tout $j \in [\![1, m]\!], \lambda_j := f \circ \gamma_j$ et $\nu_j := g \circ \gamma_j$. D'après le Lemme 6 précédent, on a $n_K(f, 0) = \sum_j \mathrm{Ind}(\lambda_j, 0)$ et $n_K(g, 0) = \sum_j \mathrm{Ind}(\nu_j, 0)$. De plus, par l'hypothèse on a que $|\nu_j - \lambda_j| < |\lambda_j| + |\nu_j|$ ce qui implique par le Lemme 7 que les lacets λ_j et ν_j sont homotopes dans $\mathbb{C}^*$, donc comme l'indice est invariant par homotopie, on a : $\mathrm{Ind}(\lambda_j, 0) = \mathrm{Ind}(\nu_j, 0)$ pour tout $j \in [\![1, m]\!]$. $\square$