leçons : 201 : Espaces de fonctions 219 : Extremums 245 : Fc° holomorphes sur ouvert de $\mathbb{C}$ 203 : notion de compacité 241 : Suites et séries de fonctions.	Thm d'uniformisation de Riemann 16	Références : Amar-Matheron "Analyse Complexe"

Thm : Tout ouvert de $\mathbb{C}$ simplement connexe et distinct de $\mathbb{C}$ est biholomorphe à $\mathbb{D}$.

preuve : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ simplement connexe et distinct de $\mathbb{C}$.

① <u>Réduction au cas borné</u>

Soit $a \in \mathbb{C}\setminus\Omega$. La fonction $z \mapsto z-a$ est holomorphe et ne s'annule pas sur Ω simplement connexe donc admet une racine carrée holomorphe sur Ω que l'on note g.

g^2 ne s'annule pas et g^2 injective $\Rightarrow$ $\left|\begin{array}{l} g \text{ ne s'annule pas, } g \text{ injective} \\ \text{et } \forall z_1, z_2 \in \Omega \quad g(z_1) \neq -g(z_2) \ (*) \end{array}\right.$

g injective donc g est ouverte, on pose $W = g(\Omega)$ ouvert de $\mathbb{C}$.
Soit $b \in W$ et $r > 0$ tels que $D(b,r) \subset W$.
Par $(*)$ $(-D(b,r)) \cap W = \emptyset$ ie $D(-b,r) \cap W = \emptyset$

Donc $\forall z \in \Omega \quad |g(z)+b| \geq r$

On pose $h : \begin{cases} W \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \dfrac{1}{g(z)+b} \end{cases}$ h est holomorphe, injective et bornée

Donc h est un biholomorphisme de W dans $h(W)$ ouvert borné simplement connexe.

On peut donc supposer que $\Omega \subset \mathbb{D}$ et $0 \in \Omega$.

② <u>lemme</u> : On pose $\mathcal{U}(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{D} \mid f(0)=0, f \text{ injective} \} \neq \emptyset$

Soit $f \in \mathcal{U}(\Omega)$. Si $|f'(0)| = \sup\limits_{g \in \mathcal{U}(\Omega)} |g'(0)|$, alors $f(\Omega) = \mathbb{D}$

preuve du lemme par contraposée : Soit $f \in \mathcal{U}(\Omega)$ tel que $f(\Omega) \subsetneq \mathbb{D}$

Soit $a \in \mathbb{D} \setminus f(\Omega)$. Soit $\varphi_a : \begin{array}{l} \mathbb{D} \to \mathbb{D} \\ z \mapsto \dfrac{a-z}{1-\bar{a}z} \end{array}$ le biholomorphisme de $\mathbb{D}$ qui s'annule en a

$\varphi_a \circ f$ ne s'annule pas sur Ω donc admet une racine carrée holomorphe notée g.
On pose $b = g(0)$ et on pose $h = \varphi_b \circ g$, $h \in \mathcal{U}(\Omega)$ car φ_b et g injectives.

$\varphi_a \circ f = g^2 = \psi \circ \varphi_{-b} \circ h$ où $\psi : \begin{array}{l} \mathbb{D} \to \mathbb{D} \\ z \mapsto z^2 \end{array}$

D'où $f = \underbrace{\varphi_{-a} \circ \psi \circ \varphi_{-b}}_{= k} \circ h$ $\quad k : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ non injective, donc par le lemme de Schwarz $k'(0) < 1$

D'où $|f'(0)| = |k'(h(0))\, h'(0)| < h'(0)$

③ Soit $(f_n) \subset \mathcal{U}(\Omega)$ telle que $|f_n'(0)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sup\limits_{g \in \mathcal{U}(\Omega)} |g'(0)|$

$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{D}\quad |f_n(z)| < 1$ donc (f_n) uniformément bornée sur Ω

D'après le théorème de Montel, il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ qui converge uniformément sur les compacts vers une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe sur Ω.

MQ $f \in \mathcal{U}(\Omega)$

- $\forall n \in \mathbb{N}\quad f_{\varphi(n)}(0) = 0$ donc $f(0) = 0$
- $\forall n \in \mathbb{N}\quad f_{\varphi(n)}$ injective donc f injective ou constante

  mais $f'(0) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_{\varphi(n)}'(0)$ et $|f_{\varphi(n)}'(0)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sup\limits_{g \in \mathcal{U}(\Omega)} |g'(0)| \geq 1$

  car $\begin{cases} \Omega \to \mathbb{D} \\ z \mapsto z \end{cases}$ est dans $\mathcal{U}(\Omega)$

  donc $f'(0) \neq 0$ donc f non constante.

- $\forall n \in \mathbb{N}\quad \forall z \in \Omega\quad |f_{\varphi(n)}(z)| < 1$

  donc $\forall z \in \Omega\ |f(z)| \leq 1$ $\quad (f(\Omega) \subset \overline{\mathbb{D}})$

  mais f holomorphe et injective donc f ouverte

  donc $f(\Omega) \subset \mathbb{D}$

④ On a trouvé $f \in \mathcal{U}(\Omega)$ telle que $|f'(0)| = \sup\limits_{g \in \mathcal{U}(\Omega)} |g'(0)|$

Donc f biholomorphisme de Ω dans $f(\Omega) = \mathbb{D}$ (par ②)