

Développement : Réduction de Jordan d'un endomorphisme nilpotent

Thomas W.

23 juillet 2023

Leçons concernées :

- 148 : Exemples de décomposition de matrices. Applications. *****
- 149 : Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.*****
- 151 : Dimension d'un espace vectoriel. Rang. Exemples et applications. *****
- 154 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications. *****
- 157 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents. *****

Références :

- Algèbre linéaire, Grifone
- Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométrie, tome 1, P.Caldero et J.Germoni

Même si la notion de sous-espaces stables intervient de manière beaucoup moins centrale que dans d'autres développements comme par exemple le théorème de réduction en matrice compagnons de Frobenius, ce développement est pour moi tout à fait pertinent dans cette leçon car la réduction de Jordan reste une réduction par blocs, qui nécessite d'avoir des sous-espaces vectoriels stables. Dans le recasage dans la leçon 149, il faudra citer la version complète de réduction de Jordan d'une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé en blocs de Jordan avec des valeurs propres non forcément nulles, et expliquer à l'oral au début du développement pourquoi il suffit d'étudier le cas des matrices nilpotentes (réduction selon les sous-espaces caractéristiques). Cela fait perdre un peu de temps par rapport aux autres leçons, donc il faut essayer d'aller vite. Les recasages dans les autres leçons sont assez clairs. En plus d'être un développement, on peut également parler de ce théorème dans d'autres leçons, sans forcément le proposer comme

développement, comme par exemple la leçon 101 sur les actions de groupes car on est entrain de classifier les orbites de matrices nilpotentes. Il faut aussi savoir donner la réduite de Jordan d'un endomorphisme nilpotent en connaissant la dimension des noyaux itérés, et savoir donner une méthode pour construire la base de Jordan d'une matrice complexe quelconque, mais comme les calculs sont longs ça m'étonnerait que le jury demande les calculs complets.

On sait que deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres, même polynôme caractéristique, polynôme minimal, déterminant, trace,... Mais est-ce que ces éléments suffisent pour déterminer si deux matrices sont semblables ou pas ? La réponse est non (cherchez un contre-exemple avec des blocs de Jordan justement). La réduction de Jordan permet de dégager un invariant total de similitude, c'est-à-dire quelque chose qui va déterminer tout de suite si deux matrices sont semblables ou pas. Il faut juste que leurs polynômes caractéristiques soient scindés. On étudie donc ici la réduction de Jordan de matrices complexes, qui se ramène à l'étude d'endomorphismes nilpotents. Je mélange ici les preuves des deux références citées. Je trouve la preuve du Grifone bien structurée. J'en récupère donc la structure. Mais cette preuve manque cruellement d'intuition à mon goût, ce qui fait qu'elle est pénible à retenir. On retrouve cette intuition avec les tableaux de Young de NH2G2. Avec les tableaux de Young (d'ailleurs, c'était dans l'écrit de MG de 2023 ! Dommage que je n'avais pas bossé ce développement avant...) on fait rentrer l'algèbre linéaire dans la notion de partition d'un entier. Passons au développement. On établit tout d'abord le résultat sur la suite des noyaux itérés pour un endomorphisme nilpotent.

Théorème (Noyaux itérés)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie ($\mathbb{K}$ corps quelconque) et u un endomorphisme nilpotent de E , d'indice de nilpotence q . Pour tout $i \in \{0, \dots, q\}$, on note $K_i = \text{Ker}(u^i)$. Alors on a les inclusions suivantes :

$$K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_q = E$$

Et les inclusions sont strictes. De plus, si on note $d_i = \dim(K_i)$, on a, pour tout $i \in \{1, \dots, q-1\}$

$$0 \leq d_{i+1} - d_i \leq d_i - d_{i-1}$$

Démonstration

La suite d'inclusion est évidente. Montrons que chaque inclusion est stricte. Supposons qu'il existe $i \in \{0, \dots, q-1\}$ tel que $K_i = K_{i+1}$. Soit $x \in K_{i+2}$. On a donc $u^{i+2}(x) = u^{i+1}(u(x)) = 0$ i.e. $u(x) \in K_{i+1}$. Mais $K_{i+1} = K_i$ donc $u^i(u(x)) = u^{i+1}(x) = 0$. D'où $K_{i+1} = K_{i+2}$. En refaisant successivement le même raisonnement, on finit par trouver $K_i = K_q = E$. Ce qui est absurde car l'indice de nilpotence de u est q .

Soit $\bar{u} : K_{i+1} \longrightarrow K_i/K_{i-1}$ défini par $\bar{u}(x) = \overline{u(x)}$. $\bar{u}$ est une application

linéaire entre deux espaces vectoriels. Déterminons son noyau. On a $x \in \text{Ker}(\bar{u}) \iff \bar{u}(x) = \bar{0} \iff u(x) \in K_{i-1} \iff x \in K_i$. Donc $\text{Ker}(\bar{u}) = K_i$. D'après le théorème d'isomorphisme (pour les espaces vectoriels), on a K_{i+1}/K_i qui est isomorphe à $\text{Im}(\bar{u})$, qui est un sev de K_i/K_{i-1} . D'où l'inégalité de droite (rappelons que $\dim(E/F) = \dim(E) - \dim(F)$ pour tout sev F de E). L'inégalité de gauche est évidente par inclusion des noyaux.

Ce théorème justifie à lui tout seul le lien entre partition d'un entier n et endomorphisme nilpotent. Soient en effet un entier $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente, d'indice de nilpotence q , dont l'endomorphisme associé dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ est noté u . Avec les mêmes notations que dans le théorème précédent, on note $\lambda_i = d_i - d_{i-1}$, $i \in \{1, \dots, q\}$. Alors, la famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_q)$ est une partition de l'entier n . Rappelons qu'une partition de n doit être décroissante, i.e. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_q$, ce qui est bien le cas ici d'après le théorème précédent. Le résultat du développement dit que deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables ssi elles définissent la même partition de l'entier n , et qu'une forme réduite de leur classe de similitude est la réduite de Jordan. Ainsi, les blocs de Jordan seront rangés dans l'ordre décroissant des tailles. Mais les tailles des blocs ne seront pas $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, il faudra pour cela considérer ce qu'on appelle la partition duale. Tout cela s'éclaircira durant le développement, grâce aux tableaux de Young, et j'en reparlerai à la fin.

Définition

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle bloc de Jordan nilpotent de taille p , ou bloc de

Jordan associé à la valeur propre 0, la matrice $J_p = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & 0 & \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Théorème

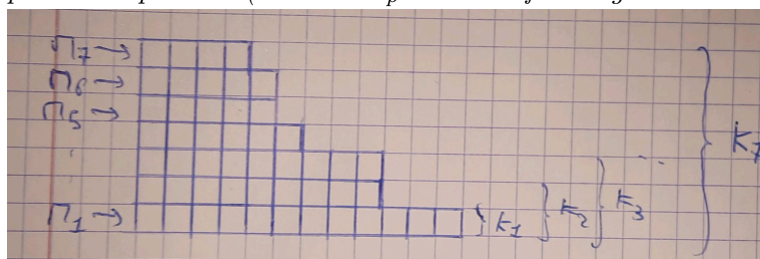
Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie ($\mathbb{K}$ corps quelconque) et u un endomorphisme nilpotent de E , d'indice de nilpotence q . Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, dont chaque bloc est un bloc de Jordan nilpotent.

Enoncer ce théorème de cette façon pour le développement suffit. Cependant, il faut savoir qu'on a certaines informations sur les blocs. J'énoncerai un résultat qui résume tout ça après le développement. Il existe aussi une jolie preuve qui passe par la dualité. Mais elle n'est pas constructive, donc moins intéressante que celle que nous allons faire car elle ne donne pas d'information sur les blocs, et elle ne fait pas le lien avec les partitions.

Démonstration

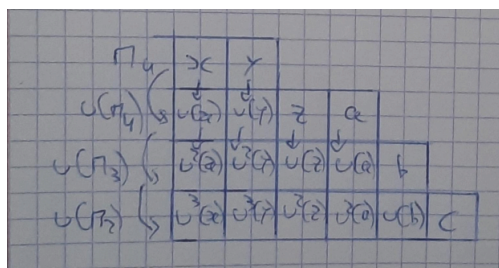
Commençons par donner l'idée de la preuve. On veut une décomposition de E en somme directe de sous-espaces stables par u , qui soient u -cycliques, c'est-à-dire qui admette une base de la forme $(x, u(x), \dots, u^k(x))$. On aimerait donc construire une base de E en prenant les images successives de certains vecteurs de E . Un tableau de Young va entièrement donner le cheminement de la preuve, et une fois qu'on a bien compris ça, le développement ne se ramène presque qu'à un travail de rédaction (j'exagère un peu, mais vraiment c'est simple à retenir, et en plus c'est joli !)

Voyons déjà à quoi ressemble le tableau de Young associé à un endomorphisme nilpotent : (Les $\text{seu } M_p$ seront définis rigoureusement juste après)



Ci-dessus le diagramme de Young associé à un endomorphisme nilpotent, d'indice de nilpotence égal à 7, d'un espace vectoriel de dimension 50, avec $d_1 = 12, d_2 = 21, d_3 = 30, d_4 = 36, d_5 = 41, d_6 = 46, d_7 = 50$. Chaque case correspond à une dimension. La première ligne est donc $\text{Ker}(u)$, les deux premières lignes donnent $\text{Ker}(u^2)$, les trois premières lignes donnent $\text{Ker}(u^3)$, etc... On observe ainsi l'inclusion des noyaux itérés. De plus, l'inégalité du premier théorème s'observe sur le tableau dans le sens où on rajoute toujours, au dessus d'une ligne, un nombre de case inférieur ou égal au nombre de case de la ligne sur laquelle on se trouve. La partition de $50 = \dim(E)$ associée ici est donc (en partant du bas) $(12, 9, 9, 6, 5, 5, 4)$. Au passage, la partition duale (celle qui donnera la taille des blocs de Jordan) est obtenue en comptant colonne par colonne, en partant de la gauche : $(7, 7, 7, 7, 6, 4, 3, 3, 3, 1, 1, 1)$. Le diagramme de Young associé à la partition duale est obtenue en effectuant une symétrie par rapport à la première bissectrice. Ainsi, pour un tel endomorphisme nilpotent, sa réduite de Jordan sera la matrice diagonale par blocs $(J_7, J_7, J_7, J_7, J_6, J_4, J_3, J_3, J_3, J_1, J_1, J_1)$ ($J_1 = (0)$).

Nous allons construire les bases des sous-espaces cycliques de la façon suivante :

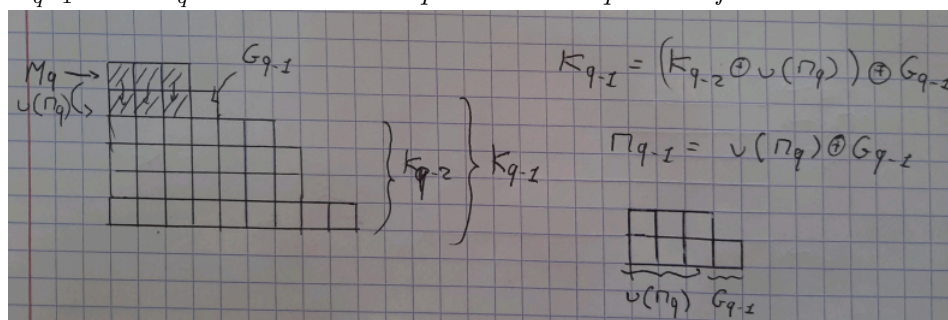


C'est-à-dire qu'on considère une base de M_q , puis on complète l'image par u de cette famille (qui sera libre) en une base de M_{q-1} , on reprends l'image par u de la base obtenue, etc... De sorte à ce que chaque ligne de vecteur obtenue donne une base du sev M_k correspondant à la ligne. Il y a plusieurs choses à démontrer dans le dessin que j'ai fait en haut. Pourquoi $u(M_{p+1}) \subseteq M_p$? Pourquoi $u(M_{p+1})$ arrive dans K_p et pas K_{p-1} ? Pourquoi l'image par u d'une famille libre de M_p est une famille libre de M_{p-1} ? En fait, tout le résultat est basé sur ces trois questions. On commence par construire les M_k sans en construire de base, et on construira ensuite dans chaque M_k une base comme on a fait précédemment.

Etape 1 : Il existe des sev $M_1, \dots, M_q$ de E tels que

1. $K_p = K_{p-1} \oplus M_p$, $p \in \{1, \dots, q\}$
2. $u(M_p) \subseteq M_{p-1}$, $p \in \{2, \dots, q\}$

Quand on regarde le tableau, on a en effet que M_p est un supplémentaire de K_{p-1} dans K_p pour tout p : On sépare les lignes de K_p en deux paquets : les $p-1$ premières lignes et la p -ième ligne. On construit les M_p par récurrence descendante : Pour M_q , on considère un supplémentaire quelconque de K_{q-1} dans K_q . Voici un dessin qui résume ce qu'on va faire :



Heureusement que je n'ai pas passé l'agreg d'arts plastiques !

Comme je l'ai dit avant, il faut commencer par justifier que l'image par u de M_q arrive dans la ligne juste en dessous, et pas plus bas. C'est-à-dire, montrons que $u(M_q) \subseteq K_{q-1}$ et $u(M_q) \cap K_{q-2} = \{0\}$. On a $M_q \subseteq K_q$ donc $u(M_q) \subseteq K_{q-1}$. Ensuite, soit $y \in u(M_q) \cap K_{q-2}$. Il existe alors $x \in M_q$ tel que $y = u(x)$. $y \in K_{q-2}$ donc $u^{q-2}(y) = 0$. Mais $u^{q-2}(y) = u^{q-1}(x) = 0$

donc on obtient $x \in K_{q-1} \cap M_q$. Mais ces espaces sont en somme directe, d'où $x = 0$ et donc $y = 0$. On a aussi montré que $u(M_q)$ et K_{q-2} sont en somme directe. Soit G_{q-1} un supplémentaire de $u(M_q) \oplus K_{q-2}$ dans K_{q-1} . On pose $M_{q-1} = u(M_q) \oplus G_{q-1}$. On construit ensuite $M_{q-2}, M_{q-3}, \dots$ la construction étant en tout point la même que celle qu'on vient de faire. Je vous invite à essayer de rédiger ceci proprement, par récurrence, tableau de Young à l'appui. Sinon, c'est fait dans Grifone. Lors de la présentation du développement, il faudra bien rédiger la récurrence (comme dans Grifone), et faire au tableau exactement le même dessin que j'ai fait mais en mettant les bons indices.

On obtient alors la décomposition en somme directe : $E = M_1 \oplus \dots \oplus M_q$, où $M_p = u(M_{p+1}) \oplus G_p$, G_p étant un supplémentaire dans K_{p-1} de $u(M_p) \oplus K_{p-1}$, pour $p \in \{1, \dots, q\}$.

Etape 2 : L'image par u d'une base de M_p est une famille libre de M_{p-1} , pour tout $p \in \{2, \dots, q\}$.

On peut prouver ça comme on fait en première année avec une combinaison linéaire nulle... Mais on peut gagner du temps en se rappelant que l'image d'une famille libre par une application linéaire injective reste libre. Ici, la restriction de u à M_p est injective car $\text{Ker}(u|_{M_p}) = \text{Ker}(u) \cap M_p \subseteq \text{Ker}(u^{p-1}) \cap M_p = \{0\}$. D'où le résultat. Cela démontre également qu'une ligne arrive bel et bien sur celle du dessous, et jamais sur 0 non plus. Rappelons que lorsqu'on dit "une ligne arrive sur celle du dessous", on imagine qu'il y a des vecteurs dans les cases qui forment une base du M_p correspondant à la ligne.

Etape 3 : Construction de la base de Jordan

Ici, on se retire une difficulté : Chaque M_p a pour dimension λ_p , où $(\lambda_1, \dots, \lambda_q)$ est la partition de n associée à l'endomorphisme nilpotent u . Dans la démonstration, on ne précisera pas cette dimension. Mais faites-le si vous avez envie, ça coûte pas grand chose de plus. Je ne l'aurais pas fait car j'aurais voulu m'éviter des questions sur les partitions, comme la définition rigoureuse d'un tableau de Young, d'une partition, de la partition duale... C'est fait dans NH2G2. Avec cette façon de faire, on peut espérer une question du jury du type "Que savons-nous sur la taille des blocs?", alors que si on le dit tout de suite dans le développement, ça pourrait inciter à creuser plus. Mais bon peut-être que je suis juste parano... A vous de voir.

Construisons alors cette base.

On prends $\mathcal{B}_q$ une base quelconque de M_q : $\mathcal{B}_q = (v_1^q, \dots, v_{n_q}^q)$. L'image par u de cette base est libre dans $M_{q-1} = u(M_q) \oplus G_{q-1}$. On la complète par des vecteurs de G_{q-1} pour former une base $\mathcal{B}_{q-1}$ de M_{q-1} : $\mathcal{B}_{q-1} =$

$(u(v_1^q), \dots, u(v_{n_q}^q), v_1^{q-1}, \dots, v_{n_{q-1}}^{q-1})$ et ainsi de suite. On obtient donc des bases $B_q, B_{q-1}, \dots, B_1$ de $M_q, M_{q-1}, \dots, M_1$:

$$B_q = (v_1^q, \dots, v_{n_q}^q)$$

$$B_{q-1} = (u(v_1^q), \dots, u(v_{n_q}^q), v_1^{q-1}, \dots, v_{n_{q-1}}^{q-1})$$

$$B_{q-2} = (u^2(v_1^q), \dots, u^2(v_{n_q}^q), u(v_1^{q-1}), \dots, u(v_{n_{q-1}}^{q-1}), v_1^{q-2}, \dots, v_{n_{q-2}}^{q-2})$$

$\vdots$

$$B_1 = (u^{q-1}(v_1^q), \dots, u^{q-1}(v_{n_q}^q), u^{q-2}(v_1^{q-1}), \dots, u^{q-2}(v_{n_{q-1}}^{q-1}), \dots, v_1^1, \dots, v_{n_1}^1)$$

La réunion de ces bases donne une base de E , car $E = M_1 \oplus \dots \oplus M_q$. Si on classe les vecteurs de ces bases en colonnes, en partant du bas à chaque fois, de la gauche vers la droite, (c'est pour ça que les blocs de Jordan ont pour taille les parts de la partition duale!), on obtient la base de Jordan demandée. Il y a cependant un point qui n'est pas évident ici : pourquoi par exemple $\text{Vect}(v_1^q, u(v_1^q), \dots, u^{q-1}(v_1^q))$ (première colonne ci-dessus) est-il stable par u ? Dans ce cas c'est facile car u est nilpotent d'indice q , donc on vérifie facilement que l'image par u de chaque vecteur $u^k(v_1^q)$ reste dans $\text{Vect}(v_1^q, u(v_1^q), \dots, u^{q-1}(v_1^q))$. Prenons la première colonne qui n'est pas de taille q : montrons que $\text{Vect}(v_1^{q-1}, u(v_1^{q-1}), \dots, u^{q-2}(v_1^{q-1}))$ est stable par u . Il suffit de regarder $u(u^{q-2}(v_1^{q-1})) = u^{q-1}(v_1^{q-1})$. Il est en fait égal à 0 car $v_1^{q-1} \in M_{q-1} \subseteq K_{q-1}$. Et c'est comme ça pour tous les autres aussi. On a aussi montré que la restriction de u à chacun de ces sous-espaces stables est un bloc de Jordan, ce qui achève la preuve.

Quelques résultats supplémentaires et commentaires

Remarquons que cette preuve donne également un algorithme de construction qui donnera la matrice de passage car on ne fait que calculer des bases, des supplémentaires, ... Mais c'est très long si on dépasse rien que la dimension 3. On voit aussi dans la preuve que la taille des premiers blocs de Jordan est égal à l'indice de nilpotence de u , et qu'il y a $d_1 = \dim(\ker(u))$ blocs de Jordan (le nombre de cases de la première ligne du tableau de Young).

Avec ce résultat on peut aisément trouver deux matrices ayant les mêmes polynômes minimaux et caractéristiques mais qui ne sont pas semblables : prendre $A = \text{diag}(J_2, J_2)$ et $B = \text{diag}(J_2, J_1, J_1)$. Leurs réduites de Jordan ne sont pas les mêmes donc elles ne sont pas semblables. On peut aussi voir que $\dim(\text{Ker}(A)) = 2$ et $\dim(\text{Ker}(B)) = 3$ plus simplement. Remarquons qu'il faut aller chercher un tel contre-exemple au moins en dimension 4 car en dimension inférieure à 3 on a équivalence entre "A et B sont semblables" et "A et B ont mêmes polynôme minimal et caractéristique" (Utiliser la réduction de Frobenius).

Voici un résultat plus précis sur ce qu'on vient de démontrer :

Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie ($\mathbb{K}$ corps quelconque) et u un endomorphisme nilpotent de E , d'indice de nilpotence q . On note $\nu = (\lambda_1, \dots, \lambda_q)$ la partition de n associée à u . Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u soit égale à $\text{diag}(J_{\lambda_1^}, \dots, J_{\lambda_{d_1}^*})$ où $(\lambda_1^*, \dots, \lambda_{d_1}^*)$ est la partition duale de ν , et $d_1 = \dim(\text{Ker}(u))$. De plus, $\lambda_1^* = q$.*

Il faut savoir passer au cas où u est un endomorphisme quelconque dont le polynôme caractéristique est scindé. Cela se fait par la réduction selon les sous-espaces caractéristiques. C'est bien fait dans Grifone.

Cela permet de trouver un invariant total de similitude pour les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, car leurs polynômes caractéristiques sont tous scindés : Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont conjuguées ssi elles ont le même spectre et si pour chaque valeur propre ω la suite des dimensions des noyaux itérés des parties nilpotentes, cad les $\dim \text{Ker}(u - \omega \text{id})^i$, sont les mêmes pour les matrices A et B . Mais il existe déjà les invariants de similitudes issus de la réduction de Frobenius, qui eux existent sur n'importe quel corps. Quel est le lien entre les deux ? Tout d'abord, il est facile de prouver l'existence et l'unicité de la décomposition de Jordan d'un endomorphisme nilpotent à partir de la décomposition de Frobenius (c'est facile et c'est fait à la fin du Gourdon Algèbre si vous voulez). Par contre, j'avoue ne pas savoir comment la connaissance des invariants de similitude $(P_1, \dots, P_s)$ d'une matrice complexe A permet de donner sa réduite de Jordan. Par contre, on peut trouver les invariants de similitudes à partir de la réduite de Jordan d'une matrice complexe. C'est fait dans NH2G2. Je n'ai rien d'autre à apporter que ce qui est écrit dans ce livre. Je vous laisse donc le soin de l'étudier. C'est important de le faire, cf le rapport du jury de la leçon 148.

Je ne serais pas étonné que ces histoires de tableaux de Young et de partitions ne soient pas claires pour vous car c'est difficile d'expliquer le concept seulement par écrit, il faudrait vraiment le voir en direct. N'hésitez donc pas à demander à vos professeurs de vous expliquer tout ça. C'est vraiment rentable car même après plusieurs semaines sans avoir fait ce développement vous arriverez à vous en sortir une fois que vous aurez bien compris le principe des tableaux de Young.