

# Développement : Théorème de Paul Lévy

Thomas W.

25 juillet 2023

## Leçons concernées

- 201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications. \*\*\*
- 234 : Fonctions et espaces de fonctions LEBESGUE-intégrables. \*\*\*\*\*
- 235 : Problèmes d'intervention en analyse. \*\*\*\*\*
- 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications. \*\*\*\*\*
- 250 : Transformation de Fourier. Applications. \*\*\*\*\*
- 261 : Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications. \*\*\*\*\*
- 262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limites. Exemples et applications. \*\*\*\*\*

## Références :

- Eléments d'analyse, H. Queffélec, C. Zuily
- Cours d'analyse fonctionnelle, D. Li
- Analyse pour l'agrégation de mathématiques, 40 développements, J. Bernis, L. Bernis

Seulement trois étoiles pour la 201 car ce n'est pas facile d'introduire le développement dans le plan, mais vous pouvez ne pas être d'accord avec moi. On peut imaginer une partie du plan sur la convergence en loi, car on teste sur l'espace des fonctions continues bornées. De toutes façons, cette leçon est tellement vaste qu'on peut imaginer beaucoup de choses ! Pour le reste, ça me paraît assez cohérent de mettre 5 étoiles. Ce développement a un très bon recasage.

On montre dans ce développement le théorème de Paul Lévy pour des variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Le résultat est vrai également pour les variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . Il y a des résultats, comme le lemme de Slutsky ou le TCL vectoriel, qui se démontrent avec la version vectorielle du théorème de Paul Lévy. Il faut donc faire attention à définir la convergence en loi pour des variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  et à bien préciser au jury, au moment du développement, qu'on traite le cas des variables aléatoires réelles. Pour voir si la preuve se généralise au cas vectoriel, il faut la

décortiquer et voir où interviennent les propriétés de la droite réelle, et voir comment passer au cas vectoriel. Mais bon, l'agreg c'est fini pour moi, je vous laisserai le plaisir de faire ceci ! Commençons par citer le résultat qui fait l'objet de ce développement.

On note  $C_b(\mathbb{R})$  l'espace des fonctions continues bornées sur  $\mathbb{R}$  et  $C_0(\mathbb{R})$  l'espace des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , qui tendent vers 0 à l'infini.

Pour une variable aléatoire réelle  $X$ , la fonction caractéristique de  $X$ , notée  $\phi_X$ , est définie par :  $\forall t \in \mathbb{R}, \phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \int_{\Omega} e^{itX} dP$

### **Théorème**

1. Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires réelles, et soit  $X$  une variable aléatoire réelle.

Il y a équivalence entre :

- i Pour toute fonction  $f \in C_b(\mathbb{R}), \mathbb{E}(f(X_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(f(X)).$
- ii Pour toute fonction  $f \in C_0(\mathbb{R}), \mathbb{E}(f(X_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(f(X)).$

2. (Théorème de Paul Lévy) Il y a équivalence entre :

- i  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en loi vers  $X$ .
- ii  $(\forall t \in \mathbb{R}), \phi_{X_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \phi_X(t).$

Pour donner l'idée du développement, on montre qu'il suffit de tester sur l'espace des fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini, puis on prouve le théorème de Paul Levy pour les fonctions de  $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ , et on utilise la densité de  $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$  dans  $C_0(\mathbb{R})$  pour conclure. Je rappellerai les définitions et les résultats à connaître dans ce développement en fin de document.

### **Démonstration**

*Dans le Queffélec/Zuily, la fonction à considérer est parachutée. Je pense que dans un développement d'agrégation, ce qui est parachuté n'est pas bon. Le développement sera plus difficile à retenir, on a moins de recul sur ce qu'on fait, et il suffit du stress pour avoir un trou de mémoire face au jury. C'est pourquoi j'ai essayé de rédiger la démonstration de sorte à motiver la construction de la fonction  $\phi$  qui va permettre de conclure.*

1. (i)  $\implies$  (ii) est évident. Montrons (ii)  $\implies$  (i). Soit  $f \in C_b(\mathbb{R})$ . On se ramène aux fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini de la façon suivante : Soit  $\phi \in C_0(\mathbb{R})$ . Alors,  $f\phi \in C_0(\mathbb{R})$ . On a donc

$$\begin{aligned} & |\mathbb{E}(f(X_n)) - \mathbb{E}(f(X))| \\ & \leq |\mathbb{E}(f(X_n)) - \mathbb{E}(f\phi(X_n))| + |\mathbb{E}(f\phi(X_n)) - \mathbb{E}(f\phi(X))| + |\mathbb{E}(f\phi(X)) - \mathbb{E}(f(X))| \\ & = A_n(\phi) + B_n(\phi) + C(\phi) \end{aligned}$$

Comme  $f\phi \in C_0(\mathbb{R})$ , on a déjà que  $B_n(\phi)$  tends vers 0 avec  $n$ , pour toute fonction  $\phi \in C_0(\mathbb{R})$ . Maintenant, nous avons le choix parmi toutes les fonctions de  $C_0(\mathbb{R})$  pour rendre  $A_n(\phi)$  et  $C(\phi)$  petits. Regardons  $A_n(\phi)$ .

$$\begin{aligned} A_n(\phi) &= |\mathbb{E}(f(X_n)) - \mathbb{E}(f(X))| \leq \int_{\Omega} |f\phi(X_n) - f(X_n)| dP \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f\phi(x) - f(x)| dP_{X_n}(x) \leq \|f\|_{\infty} \int_{\mathbb{R}} |1 - \phi(x)| dP_{X_n}(x) \end{aligned}$$

On aimerait retirer le module de l'intégrale pour pouvoir utiliser la linéarité de l'intégrale et le fait que  $\phi \in C_0(\mathbb{R})$  et donc que, par hypothèse,

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x) dP_{X_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) dP_X(x)$$

Soit alors  $\phi \in C_0(\mathbb{R})$  telle que  $0 \leq \phi \leq 1$  (une telle fonction est réelle, mais quand même à valeurs dans  $\mathbb{C}$  bien sûr). En poursuivant les calculs précédents, on obtient :

$$A_n(\phi) \leq \|f\|_{\infty} \int_{\mathbb{R}} (1 - \phi(x)) dP_{X_n}(x)$$

On peut alors passer à la limite supérieure (et surtout pas à la limite, car rien ne dit qu'elle existe. C'est l'avantage des limites supérieures et inférieures : finies ou infinies, elles existent toujours ! Je pense que c'est une bonne remarque à garder en tête pour la leçon 223)

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n(\phi) \leq \|f\|_{\infty} \int_{\mathbb{R}} (1 - \phi(x)) dP_X(x)$$

Il faut alors minimiser  $\int_{\mathbb{R}} (1 - \phi(x)) dP_X(x)$ , parmi les fonctions  $\phi \in C_0(\mathbb{R})$  telles que  $0 \leq \phi \leq 1$ . Soit  $\epsilon > 0$ .

Comme  $0 \leq \phi \leq 1$ , on a déjà  $\int_{\mathbb{R}} (1 - \phi(x)) dP_X(x) \leq \mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = 1$ . L'inégalité n'est pas assez précise car l'intégrale est portée sur  $\mathbb{R}$ . On donne alors une forme plus précise à la fonction  $\phi$  de sorte à affiner cette inégalité :

Soit  $A > 0$ . Soit  $\phi \in C_0(\mathbb{R})$  telle que  $\phi$  est égale à 1 sur  $[-A, A]$  et  $0 \leq \phi \leq 1$  (par exemple une fonction trapèze, un dessin ne fait pas de mal). Ainsi,  $1 - \phi$  est nulle sur  $[-A, A]$  et donc l'intégrale n'est portée que sur  $\{x, |x| > A\}$ . Alors,

$$\int_{\mathbb{R}} (1 - \phi(x)) dP_X(x) = \int_{\{x, |x| > A\}} (1 - \phi(x)) dP_X(x) \leq \mathbb{P}_X(\{x, |x| > A\}) = \mathbb{P}(|X| > A)$$

Or, on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X| > n) = 0$  (Propriété de la fonction de répartition d'une variable aléatoire), donc on peut choisir  $A > 0$  tel que

$\int_{\mathbb{R}} (1 - \phi(x)) dP_X(x) < \epsilon$ . Ainsi, on a, en passant à la limite supérieure dans l'inégalité :

$$|\mathbb{E}(f(X_n)) - \mathbb{E}(f(X))| \leq A_n(\phi) + B_n(\phi) + C(\phi)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\mathbb{E}(f(X_n)) - \mathbb{E}(f(X))| \leq 2\epsilon \|f\|_{\infty}$$

D'où le résultat car on a alors égalité entre les limites supérieures et inférieures, qui valent 0, et ceci implique que la limite existe et vaut 0.

2. (i)  $\implies$  (ii) est évident. Montrons (ii)  $\implies$  (i). Comme dit au début du développement, on va utiliser la densité de  $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$  dans  $C_0(\mathbb{R})$  pour se ramener aux fonctions de  $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ . Lorsque j'ai passé l'agrégation (2023), la leçon sur la densité n'était plus au programme. Mais si jamais elle revient, ce développement rentrerait parfaitement dedans car elle illustre l'utilisation usuelle de la densité : on se ramène à des fonctions qui ont des propriétés intéressantes, et la densité permet de passer au cas général. Le densité de  $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$  dans  $C_0(\mathbb{R})$  est une conséquence du théorème de Stone-Weierstrass appliqué au compactifié d'Alexandrov de  $\mathbb{R}$ . Vous pouvez donc mettre ce théorème comme exemple d'application du théorème de Stone-Weierstrass dans vos leçons, sans forcément le prendre comme développement. C'est assez joli, et ça change des applications usuelles de densité des polynômes trigonométrique (qu'il faut connaître également biensûr). Je ne maîtrise pas très bien la notion de compactifié d'Alexandrov, mais j'essaierai de rédiger une démonstration de la densité de  $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$  dans  $C_0(\mathbb{R})$  à la fin du document. Revenons au développement.

Soit  $\psi \in \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ . Montrons que  $\mathbb{E}(\psi(X_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\psi(X))$ .

$\psi \in \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ , donc il existe  $f \in L^1(\mathbb{R})$  telle que  $\forall x \in \mathbb{R}, \psi(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2i\pi xy} dy$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\psi(X_n)) &= \int_{\Omega} \psi(X_n) dP \\ &= \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2i\pi X_n y} dy dP \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} f(y) e^{-2i\pi X_n y} dP dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \phi_{X_n}(-2\pi y) dy \end{aligned}$$

où on a utilisé librement le théorème de Fubini. Les hypothèses sont faciles à vérifier car  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et  $\phi_X$  est de module inférieur à 1 pour toute variable aléatoire  $X$ . Si ce développement a pour but d'illustrer la leçon 235 ou 239, il

faudra bien sûr insister sur ces points et rédiger correctement la vérification des hypothèses.

Par hypothèses, on a  $\phi_{X_n}(-2\pi y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \phi_X(-2\pi y)$ , pour tout  $y \in \mathbb{R}$ . Comme  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , le théorème de convergence dominée permet alors de passer à la limite. On obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\psi(X_n)) &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \phi_X(-2\pi y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} f(y) e^{-2i\pi X y} dP dy \\ &= \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2i\pi X y} dy dP \\ &= \mathbb{E}(\psi(X)) \end{aligned}$$

Passons au cas général.  $C_0(\mathbb{R})$  est muni de la norme infini. Soit  $f \in C_0(\mathbb{R})$ . Soit  $\epsilon > 0$ . Par densité, il existe  $\psi \in \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$  telle que  $\|f - \psi\|_{\infty} < \epsilon$ . On a alors :

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(f(X_n)) - \mathbb{E}(f(X))| &\leq |\mathbb{E}(f(X_n)) - \mathbb{E}(\psi(X_n))| + |\mathbb{E}(\psi(X_n)) - \mathbb{E}(\psi(X))| + |\mathbb{E}(\psi(X)) - \mathbb{E}(f(X))| \\ &= A_n + B_n + C \end{aligned}$$

On a déjà d'après ce qui précède que  $B_n$  tend vers 0. Ensuite, on traite de la même façon  $A_n$  et  $C$ . Faisons  $A_n$ .

$$A_n \leq \mathbb{E}(|f(X_n) - \psi(X_n)|) \leq \mathbb{E}(|f - \psi|(X_n)) \leq \mathbb{E}(\|f - \psi\|_{\infty}) < \epsilon$$

Un passage à la limite supérieure comme ce qui a déjà été fait permet de conclure, ce qui termine le développement.

### Quelques résultats supplémentaires

Ceux qui font l'option A savent qu'on utilise assez souvent le théorème de Paul Lévy pour prouver une convergence en loi. Une autre caractérisation souvent utilisée est la convergence simple de la suite des fonctions de répartition en tout point de continuité de la fonction de répartition de la variable aléatoire limite. Il arrive aussi qu'on se ramène à la définition avec les fonctions continues bornées, j'ai vu ça dans un sujet de modélisation.

Il existe une autre version du théorème de Paul Lévy : Si la suite des fonctions caractéristiques converge simplement en tout point vers une fonction continue en 0, alors il existe une variable aléatoire  $X$  dont la fonction caractéristique est la fonction limite de la suite des fonctions caractéristiques. Mais cette version est bien plus longue à démontrer.

Il faut savoir démontrer le théorème central limite avec le théorème de Paul Lévy. Le seul obstacle dans la démonstration est l'intervention du logarithme complexe, avec lequel on peut ne pas être à l'aise. Il existe une preuve qui se

passer du logarithme complexe en exploitant une certaine inégalité. Je vous conseille quand même de bosser le logarithme complexe, car on peut en parler dans les leçons 245 et 265, et il intervient dans le développement "formule des compléments", qui lui rentre dans beaucoup de leçons d'analyse. Je vous propose alors une démonstration du TCL qui utilise le logarithme complexe. La preuve est trouvable dans le Bernis.

**Remarque :** C'est le théorème qui est central, pas la limite!!

### **Théorème (Central limite)**

*Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes, identiquement distribuées telle que  $X_1$  possède une variance non nulle, finie (Rappelons que ceci implique que l'espérance existe aussi). On note  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  et  $\overline{X_n} = \frac{S_n}{n}$ . Alors, on a :*

$$\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mathbb{E}(X_1)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \text{Var}(X_1))$$

**Remarque :** Il vaut mieux le retenir sous cette forme, car c'est cette forme qui permet de généraliser le TCL au cas vectoriel avec la matrice des variances/covariance.

### **Démonstration**

On peut supposer que les  $X_n$  sont centrées, réduites. Le passage au cas général se fait en posant  $Y_n = \frac{X_n - \mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{\text{Var}(X_1)}}$ .

On a  $\sqrt{n}\overline{X_n} = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$ . Le calcul de la fonction caractéristique de  $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$  donne, ( $\forall t \in \mathbb{R}$ ) :

$$\phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n$$

Le calcul est classique et je vous en laisse le soin.

Comme  $X_1$  admet un moment d'ordre 2, sa fonction caractéristique est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  et admet un développement limité jusqu'à l'ordre 2 en 0, dont les coefficients sont les dérivées successives de  $\phi$  en 0. On obtient alors :

$$\phi_{X_1}(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

On a alors, en notant  $\text{Log}$  la détermination principale du logarithme complexe,

$$\phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \exp\left(n \text{Log}\left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

Cette expression a bien un sens car, à partir d'un certain rang,  $1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$  n'est plus négatif. Les déterminations du logarithme obtenues en retirant une demi-droite sont toutes holomorphes sur  $\mathbb{C}$  privé de cette demi-droite. Ici, on

a retiré  $\mathbb{R}^-$ . Il n'y a rien de plus à savoir pour poursuivre le développement. Cependant, cela pourrait susciter des questions de jury sur le logarithme complexe. Par exemple, quel est le logarithme principal de  $e^{\frac{7i\pi}{2}}$  ? et son logarithme coprincipal ? (obtenu en retirant  $\mathbb{R}^+$ ). Réponses :  $\frac{-i\pi}{2}$  et  $\frac{3i\pi}{2}$ . Si cela n'est pas claire pour vous, ne présentez pas le TCL avec le logarithme complexe, ou alors, si vous avez le temps, travaillez plus sur le logarithme complexe. En fait tout se ramène à une question de détermination de l'argument. Il est important de savoir quelle détermination du logarithme on utilise. Cela se voit bien dans le développement "formule des compléments" faite dans le Bernis. D'ailleurs, j'ai un peu la flemme de rédiger ce développement car c'est rempli de calculs, mais on peut retrouver la formule du produit infini du sinus grâce à la formule des compléments. Je trouve que c'est moins fastidieux de cette façon, plutôt que celle habituelle où on étudie le produit infini pour montrer qu'il est holomorphe, on majore avec les sinus hyperboliques etc... On peut aussi aller dans l'autre sens et prouver la formule des compléments à partir de la formule du développement du sinus en produit infini. Bref, revenons au développement :

Le logarithme principal est donc une fonction analytique sur  $\mathbb{C}$  privé de  $\mathbb{R}^-$ . Elle admet donc un développement limité en 1 qui va coïncider avec celui du logarithme népérien (ou alors, il suffit de tronquer la série entière définie dans un voisinage de 1, à l'ordre 1). On a donc :

$$\phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2} + o(1)\right)$$

D'où le résultat par le théorème de Paul Lévy, car on reconnaît la fonction caractéristique d'une variable aléatoire de loi normale centrée réduite, après passage à la limite.

Pour finir, montrons le résultat suivant :

### **Théorème**

$\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$  est dense dans  $(C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ .

On commence par un lemme qui sera bien utile dans la démonstration, et qui est assez intuitif :

### **Lemme**

Soit  $X$  un espace localement compact et  $\tilde{X} = X \cup \{\omega\}$  son compactifié d'Alexandrov. Alors, l'espace  $C_0(X)$  s'identifie à l'espace des fonctions continues sur  $\tilde{X}$  telles que  $f(\omega) = 0$ .

### **Démonstration**

C'est bien intuitif car le point  $\omega$  agit comme s'il était à l'infini pour  $X$ .

Rappelons que  $C_0(X) = \{f \in C(X, \mathbb{C}), (\forall \epsilon > 0), (\exists K \text{ compact de } X)(\forall x \notin K), |f(x)| < \epsilon\}$ .

On veut montrer que l'application

$$\begin{aligned} C_0(X) &\longrightarrow \{f \in C(\tilde{X}), f(\omega) = 0\} \\ f &\longrightarrow \tilde{f} \end{aligned}$$

où  $\tilde{f} = f$  sur  $X$  et 0 en  $\omega$ , est une bijection. Rappelons aussi que les ouverts de  $\tilde{X}$  sont les ouverts de  $X$  et les complémentaires dans  $\tilde{X}$  des compacts de  $X$ . Alors, l'application est clairement bijective. Il faut en fait montrer qu'elle est bien à valeurs dans  $\{f \in C(\tilde{X}), f(\omega) = 0\}$ , et qu'on obtient bien une fonction continue de  $C_0(X)$  en prenant la restriction à  $X$  d'une fonction de  $\{f \in C(\tilde{X}), f(\omega) = 0\}$ . Soit alors  $f \in C_0(\mathbb{R})$ . Vu les ouverts de  $\tilde{X}$ , il suffit de montrer que le prolongement  $\tilde{f}$  est continu en  $\omega$ . Mais c'est immédiat par définition des ouverts de  $\tilde{X}$  : En effet, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un compact  $K$  de  $X$  tel que pour tout  $x \in \tilde{X} - K$ ,  $|f(x)| < \epsilon$ . Or,  $\tilde{X} - K$  est un voisinage ouvert de  $\omega$  pour la topologie de  $\tilde{X}$ . D'où le résultat. Enfin, si  $\tilde{f} \in \{f \in C(\tilde{X}), f(\omega) = 0\}$ , il faut montrer que la restriction à  $X$  est continue pour la topologie de  $X$ . Mais c'est de nouveau immédiat :  $\tilde{f}$  est continue en tout point  $a \in X$ , donc pour tout  $a \in X$  et pour tout  $\epsilon > 0$  il existe un voisinage ouvert  $\tilde{O}$  de  $a$  dans  $\tilde{X}$  tel que  $(\forall x \in \tilde{O}), |f(x) - f(a)| < \epsilon$ . Si  $\tilde{O}$  est un ouvert de  $X$ , c'est bon. Sinon, il existe un compact  $K$  de  $X$  tel que  $\tilde{O} = \tilde{X} - K$ . Si on pose  $O = X - K$ , c'est un ouvert de  $X$  qui convient.

On peut alors démontrer le théorème.

### Démonstration

Tout d'abord, on a bien l'inclusion  $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R})) \subseteq C_0(\mathbb{R})$  d'après le lemme de Riemann-Lebesgue. On peut démontrer le lemme de Riemann-Lebesgue par densité de l'espace  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  dans  $L^1(\mathbb{R})$  et grâce à une intégration par parties. Il est également connu qu'on n'a pas égalité, i.e. que la transformation de Fourier n'est pas surjective de  $L^1(\mathbb{R})$  dans  $C_0(\mathbb{R})$ . On veut utiliser le théorème de Stone-Weierstrass complexe. On note  $K = \tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\omega\}$  le compactifié d'Alexandrov de  $\mathbb{R}$ . D'après le lemme précédent,  $C_0(\mathbb{R})$  s'identifie à  $\{f \in C(\tilde{R}), f(\omega) = 0\}$ . Comme  $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$  ne contient pas les constantes non nulles (lemme de Riemann-Lebesgue), pour appliquer le théorème de Stone-Weierstrass, on va les rajouter : On pose  $A = \mathbb{C}.1_K \oplus \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$  où  $1_K$  est la fonction constante égale à 1 sur  $K$ . La somme est bien directe par le lemme de Riemann-Lebesgue, et  $A$  est une sous-algèbre complexe de  $C(K)$ . Montrons que  $A$  sépare les points de  $K$ . On commence par montrer que  $A$  sépare les points de  $\mathbb{R}$ . Il suffit de montrer que  $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$  sépare les points de  $\mathbb{R}$ . Soient  $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ . Si  $\mathcal{F}(f)(y_1) = \mathcal{F}(f)(y_2)$ , pour tout  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , Alors on a

$$\int_{\mathbb{R}} (e^{-2i\pi xy_1} - e^{-2i\pi xy_2}) f(x) dx = 0, (\forall f \in L^1(\mathbb{R}))$$

En prenant  $f(x) = (e^{2i\pi xy_1} - e^{2i\pi xy_2})e^{-x^2}$  (pour ne pas juste recopier Daniel Li...), on a :

$$\int_{\mathbb{R}} |e^{-2i\pi xy_1} - e^{-2i\pi xy_2}|^2 e^{-x^2} dx = 0$$

L'intégrale d'une fonction continue, positive étant nulle ssi cette fonction est nulle, on obtient que  $|e^{-2i\pi xy_1} - e^{-2i\pi xy_2}|^2 e^{-x^2} = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Ceci implique que  $e^{-2i\pi xy_1} = e^{-2i\pi xy_2}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Attention ! L'exponentielle complexe n'est pas injective. Pour conclure que  $y_1 = y_2$ , dériver et prendre  $x = 0$ .

Soit  $y \in \mathbb{R}$ . Montrons que  $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$  sépare  $y$  et  $\omega$ . Il suffit de montrer qu'il existe  $f \in L^1(\mathbb{R})$  telle que  $\mathcal{F}(f)(y) \neq 0$ . Il suffit de prendre la gaussienne, qui est sa propre transformée de Fourier (ou à constante près mais ça ne changera rien ici), qui n'est jamais nulle sur  $\mathbb{R}$ .

Enfin,  $A$  est stable par conjugaison car  $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$  l'est (vérifiez le, simple passage à la conjugaison complexe dans l'intégrale). Alors, d'après le théorème de Stone-Weierstrass complexe,  $A$  est dense dans  $C(K)$ . On en déduit que  $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$  est dense dans  $C_0(\mathbb{R})$  :

Soit  $h \in C_0(\mathbb{R})$ , et soit  $\epsilon > 0$ . Comme  $C_0(\mathbb{R}) \subseteq C(K)$ , il existe  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et une constante complexe  $\lambda$  telles que  $\|h - \mathcal{F}(f) - \lambda\|_{C(K)} < \epsilon$ . En évaluant en  $\omega$ , on trouve  $|\lambda| < \epsilon$ . D'où  $\|h - \mathcal{F}(f)\|_{C_0(\mathbb{R})} = \|h - \mathcal{F}(f)\|_{C(K)} < 2\epsilon$  par inégalité triangulaire. Ce qui démontre le théorème.

Dans la leçon 250, en général, après avoir donner les propriétés principales de la transformée de Fourier, deux directions sont prises : soit on part dans la théorie des distributions, soit on part vers les fonctions caractéristiques de variables aléatoires (ou transformées de Fourier de mesures bornées de manière plus générale). Pour prendre ce développement dans la 250, il est évidemment nécessaire de prendre la deuxième option.

On pourrait envisager un développement dans la leçon 203 sur la compacité en démontrant que  $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$  est dense dans  $(C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$ , puis le théorème de Paul Lévy. C'est cohérent, mais je n'aurais pas pris le risque de me lancer là dedans à cause du compactifié d'Alexandrov. Qui sait le genre de questions que pourrait poser le jury ? En tous cas je ne me sens pas assez à l'aise avec ça pour prendre ce risque. Libre à vous de le faire si vous le sentez bien. Essayez de le présenter à vos professeurs pour voir ce qu'ils en pensent. Je vous souhaite bon courage pour vos révisions, j'espère que ce document vous a aidé et qu'il vous a plu.