

Théorème de Burnside.

Algèbre 2 Graux X-ens

Théorème: Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$. Si G est d'exposant fini, alors G est fini. 185.

Lemme: Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \text{Tr}(A^k) = 0$. Alors A est nilpotente.

Preuve Lemme: Comme $A \in M_n(\mathbb{C})$, on sait que χ_A est scindé. En particulier, A est trigonalisable.

On suppose par l'absurde que A n'est pas nilpotente:

Alors, A admet des valeurs propres non nulles. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ses valeurs propres distinctes non nulles et $n_1, \dots, n_r$ leur ordre de multiplicité.

Comme A est trigonalisable, A est semblable à une matrice triangulaire avec sur la diagonale $(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{n_1}, \dots, \underbrace{\lambda_r, \dots, \lambda_r}_{n_r}, 0, \dots, 0)$

Ainsi, par hypothèse, $\forall k \geq 1, \text{Tr}(A^k) = n_1 \lambda_1^k + \dots + n_r \lambda_r^k = \sum_{i=1}^r n_i \lambda_i^k = 0$.

Ainsi, le vecteur $(n_1, \dots, n_r)$ est solution du système:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_r \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^k & \dots & \lambda_r^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{On a déterminant de } \Pi \text{ est non nul et}$$

$$\det(\Pi) = \prod_{k=1}^r \lambda_k \prod_{1 \leq i < j \leq r} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0 \text{ par Vandermonde}$$

On a donc $n_1 = \dots = n_r = 0$ ce qui est absurde. Ainsi, 0 est la seule valeur propre de A . Alors $\chi_A = X^n$ et par Cayley-Hamilton, $A^n = 0$.

Donc A est nilpotente.

Preuve Théorème: Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ d'ordre fini N .

Soit $(\pi_i)_{1 \leq i \leq m} \in G^m$ une base de $\text{Vect}(G)$.

On pose $f: G \rightarrow \mathbb{C}^m$
 $A \mapsto (\text{Tr}(A\pi_i))_{1 \leq i \leq m}$

* Montrons que toutes les matrices de G sont diagonalisables.

Toutes les matrices de G sont annihilées par $X^N - 1$ qui est un polynôme annulateur scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$. Ainsi, toutes les matrices de G sont diagonalisables dans $M_n(\mathbb{C})$.

* Montrons que: Si $\forall (A, B) \in G$, $f(A) = f(B)$ alors $AB^{-1} - I_n$ est nilpotente:

Comme $f(A) = f(B)$, on a $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, $\text{Tr}(A\pi_i) = \text{Tr}(B\pi_i)$. Soit $\eta \in G$, on a

$$\eta = \sum_{i=1}^m \lambda_i \pi_i. \text{ D'où par linéarité: } \text{Tr}(A\eta) = \text{Tr}\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i A\pi_i\right) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{Tr}(A\pi_i) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{Tr}(B\pi_i) = \text{Tr}(B\eta)$$

Donc $\text{Tr}(A\eta) = \text{Tr}(B\eta)$. On pose $D = AB^{-1}$ et $\forall h \in \mathbb{N}^*$, on a $\text{Tr}(D^h) = \text{Tr}(AB^{-1}D^{h-1}) = \text{Tr}(BB^{-1}D^{h-1}) = \text{Tr}(D^{h-1})$

$$\text{Donc } \forall h \geq 1, \text{Tr}(D^h) = \text{Tr}(I_n) = n \text{ d'où } \text{Tr}((D - I_n)^h) = \text{Tr}\left(\sum_{i=1}^h \binom{h}{i} (-1)^i D^{h-i}\right) = \sum_{i=1}^h \binom{h}{i} (-1)^i \text{Tr}(D^{h-i}) = 0.$$

Donc par le lemme, $(D - I_n)$ est nilpotente.

* Montrons que f est injective: On suppose $f(A) = f(B)$

D'après ce qui précède, D est diagonalisable, or $D - I_n$ est diagonalisable et nilpotente.

Donc $D - I_n = 0$ d'où $D = I_n$ et $A = B$ donc f injective.

* Montrons que G est fini:

On pose $X = \{\text{Tr}(A) \mid A \in G\}$. On a alors $\text{Im}(f) \subset X^m$. Mais comme X est fini, car les valeurs propres des éléments de G sont les racines N -ièmes de l'unité et la trace est la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité. Ainsi, X^m est fini et donc $\text{Im}(f)$ est fini aussi.

Donc G est fini par injectivité de f .