

Théorème central Limite

Berni prog

Théorème : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, identiquement distribuées et éléments de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

$$\text{On a alors } \frac{S_n - nE(X)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \text{Var}(X_1))$$

Lemme : Soit $(a, b) \in \overline{D(0, 1)}$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, |a^n - b^n| \leq n|a - b|$

Preuve : $|a^n - b^n| = |a - b| \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$
 $\leq |a - b| \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{|a^{n-1-k} b^k|}_{\leq 1} \leq n|a - b|$

Preuve Théorème : Quitte à considérer la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad Y_n = \frac{X_n - E(X_1)}{\sqrt{\text{Var}(X_1)}}$

On peut supposer $E(X_1) = 0$ et $\text{Var}(X_1) = 1$.

Par le Théorème de Levy, il suffit de montrer la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions caractéristiques $(\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}})_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers la fonction caractéristique de la loi normale centrée réduite : $t \mapsto \exp(-\frac{t^2}{2})$.

Soit $t \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} \varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) &= E\left(\exp\left(i \frac{t}{\sqrt{n}} S_n\right)\right) = E\left(\exp\left(i \frac{t}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n X_k\right)\right) \\ &= E\left(\prod_{k=1}^n \exp\left(i \frac{t}{\sqrt{n}} X_k\right)\right) \\ &= \prod_{k=1}^n E\left(\exp\left(i \frac{t}{\sqrt{n}} X_k\right)\right) \quad \text{par indépendance} \\ &= E\left(\exp\left(i \frac{t}{\sqrt{n}} X_1\right)\right)^n \quad \text{car les } X_k \text{ ont même loi} \\ &= \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n \end{aligned}$$

Gr comme X_1 est de carré intégrable, φ_{X_1} est C^2 sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\varphi'_{X_1}(0) = i E(X_1) = 0 \text{ et } \varphi''_{X_1}(0) = -E(X_1^2) = -\text{Var}(X_1) = -1.$$

Ainsi, φ_{X_1} admet un DL en 0 de la forme $\varphi_{X_1}(h) = 1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$

Donc $\exists \varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tq $\varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ et $\varphi_{X_1}(h) = 1 - \frac{h^2}{2} + h^2 \varepsilon(h)$.

Comme $\frac{t^2}{2n} \rightarrow 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geq N$ $|1 - \frac{t^2}{2n}| \leq 1$.

Donc par le Lemme, $\forall n \geq N$ $|\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) - (1 - \frac{t^2}{2n})^n| = |\varphi_{X_1}(\frac{t}{\sqrt{n}})^n - (1 - \frac{t^2}{2n})^n|$
 $\leq n |\varphi_{X_1}(\frac{t}{\sqrt{n}}) - (1 - \frac{t^2}{2n})|$
 $\leq t^2 |\varepsilon(\frac{t}{\sqrt{n}})| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

De plus, $(1 - \frac{t^2}{2n})^n \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}$ donc on a bien $\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) \rightarrow \exp(-\frac{t^2}{2})$.

Application: Théorème de Moivre-Laplace. Soit $p \in]0, 1[$. Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $Y_n \sim \mathcal{B}(n, p)$.

$$\text{Alors } \frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Preuve : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes et identiquement distribuées tq $X_n \sim \mathcal{B}(p)$. D'après le TCL, car X_n est de carré C^2

$$\text{On a } \frac{S_n - np}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, p(1-p)) \text{ d'où } \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

Gr $\forall n \in \mathbb{N}^*$, Y_n et S_n ont la même loi

$$\text{D'où } \frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$