Projection sur un convexe fermé

Gourdon

Théorème : Soit H un espace de Hilbert et C un convexe fermé non vide.
Alors : $\forall x \in H$, $\exists ! \, y \in C$ tel que $\|x-y\| = d(x,C) = \inf_{z \in C} \|x-z\|$. On dit que $y = p_C(x)$ est la projection de x sur C. De plus, x_C est caractérisé par : $\forall z \in C$ $\langle z - x_C, x - x_C \rangle \leq 0$.

Preuve : <u>Existence</u> : On pose $\delta = d(x,C) = \inf_{z \in C} \|x-z\|$. Il existe une suite $(y_n) \in C^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim_{n \to +\infty} \|x-y_n\| = \delta$ $\left(\exists (y_n) \in C^{\mathbb{N}} \; d^2 \leq \|x-y_n\|^2 < d^2 + \frac{1}{n} \right)$

Montrons que (y_n) converge (est de Cauchy car H est complet) :
Comme $\|.\|$ est issue d'un produit scalaire, elle vérifie l'identité du parallélogramme, donc :

$$\forall p,q \in \mathbb{N}, \quad \|\underbrace{(x-y_p)}_{a} + \underbrace{(x-y_q)}_{b}\|^2 + \|\underbrace{y_p - y_q}_{a-b}\|^2 = 2\left(\|x-y_p\|^2 + \|x-y_q\|^2\right) \quad (*)$$

Or C est convexe, donc $\forall p,q \in \mathbb{N}$, $\frac{y_p+y_q}{2} \in C$ donc $\left\|x - \frac{y_p+y_q}{2}\right\| \geq \delta$ car δ est l'inf $\|x-\text{truc dans } C\|$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } \|(x-y_p)+(x-y_q)\|^2 &= \|2x - (y_p+y_q)\|^2 \\ &= 4\left\|x - \frac{(y_p+y_q)}{2}\right\|^2 \geq 4\delta^2 \end{aligned}$$

Donc par $(*)$, on en déduit : $\forall p,q \in \mathbb{N}$, $\|y_p - y_q\|^2 \leq 2\left[\left(\|x-y_p\|^2 - \delta^2\right) + \left(\|x-y_q\|^2 - \delta^2\right)\right]$
et comme $\|x-y_n\|$ tend vers δ, alors (y_n) est bien une suite de Cauchy. On note $y \in H$ la limite de (y_n) qui existe car H est un hilbert or C est fermé donc $y \in C$ et $\|x-y\| = \lim_{n \to +\infty} \|x-y_n\| = \delta = d(x,C)$

<u>Unicité</u> : Par l'absurde, supposons $z \in C$ tel que $\|x-z\| = \delta$.
Définissons une suite $(y_n) \in C^{\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} y_n = y & \text{si } n \text{ pair} \\ y_n = z & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

Cette suite vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x-y_n\| = \delta$ en particulier $\|x-y_n\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} \delta$
Donc par ce qui précède, (y_n) converge et par unicité de la limite, $z = y$.

Montrons la caractérisation : Supposons que pour $y \in C$, on ait : $\forall z \in C \ \langle z-y, x-y \rangle \leq 0$.

Alors, $\forall z \in C$, $\|z-x\|^2 = \|(z-y)-(x-y)\|^2 = \|z-y\|^2 + \|x-y\|^2 - 2\langle z-y, x-y \rangle$

$$\geq \|z-y\|^2 + \|x-y\|^2$$
$$\geq \|x-y\|^2.$$

Donc $\forall z \in C$, $\|z-x\|^2 \geq \|y-x\|^2$. De plus, $y \in C$, donc $\|y-x\| = d(x, C)$ et par unicité $y = x_C$

Montrons que la propriété est vraie pour $y = x_C$:

$\forall z \in C$, on a $\|x-z\|^2 \geq \|x-x_c\|^2$ en développant $\|x-z\|^2 = \|(x-x_c)-(z-x_c)\|^2$,

On obtient $\|x-z\|^2 \geq \|x-x_c\|^2 \iff \|(x-x_c)-(z-x_c)\|^2 \geq \|x-x_c\|^2$

$$\iff -2\langle x-x_c, z-x_c \rangle + \underline{\|z-x_c\|^2} \geq 0. \quad (**)$$

On veut se débarasser de lui

Soit $z_0 \in C$, comme C est convexe, $z = \lambda z_0 + (1-\lambda)x_c \in C$ pour tout $\lambda \in [0,1]$.

Donc en appliquant $(**)$ à z, on tire

$\forall \lambda \in [0,1]$, $-2\lambda\langle x-x_c, z_0-x_c \rangle + \lambda^2 \|z_0-x_c\|^2 \geq 0$.

Donc $\forall \lambda \in]0,1]$, $-2\langle x-x_c, z_0-x_c \rangle + \lambda\|z_0-x_c\|^2 \geq 0$.

et en faisant tendre $\lambda \to 0$ on obtient $-2\langle x-x_c ; z_0-x_c \rangle \geq 0 \ \forall z_0 \in C$.

Donc $\forall z_0 \in C$, $\langle x-x_c, z_0-x_c \rangle \leq 0$.