

Méthode QR

Carlet p 124

Théorème: Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On suppose que les valeurs propres sont toutes de modules différents. Il existe donc une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $A = P D P^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et $|\lambda_1| > \dots > |\lambda_n| > 0$ et on suppose que P^{-1} admet une factorisation LU. Alors la suite $(A_h)_h$ définie par :

$$\begin{cases} A_h = Q_h R_h \\ A_{h+1} = R_h Q_h (= Q_{h+1} R_{h+1}) \end{cases} \text{ est telle que } \begin{cases} \lim_{h \rightarrow +\infty} (A_h)_{i,i} = \lambda_i \\ \lim_{h \rightarrow +\infty} (A_h)_{i,j} = 0 \quad 1 \leq j < i \leq n \end{cases}$$

Preuve: On remarque que $A_{h+1} = Q_h A_h Q_h^t = (R_h Q_h) \quad \forall h \geq 1$.

et donc par récurrence, $A_{h+1} = (Q_1 \dots Q_h) A (Q_1 \dots Q_h)^t = Q_h A Q_h$

$$\begin{aligned} \text{On a } \forall h \geq 1, A^h &= Q_1 (R_1 Q_1) \dots (R_{h-1} Q_{h-1}) R_h \\ &= Q_1 Q_2 (R_2 Q_2) \dots (R_{h-1} Q_{h-1}) R_h R_{h-1} \\ &= (Q_1 \dots Q_h) (R_h \dots R_1) = Q_h R_h \end{aligned}$$

On décompose alors $P^{-1} = L U$ et $P = Q R$

Alors $A^h = P D^h P^{-1} = Q R (D^h L D^{-h}) D^h U$, or L est triangulaire inf, avec $L_{i,i} = 1$

$$\text{On a alors } (D^h L D^{-h}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ 1 & \text{si } i = j \\ (\frac{\lambda_i}{\lambda_j})^h L_{i,j} & \text{si } i > j \end{cases} \quad \text{D'où } D^h L D^{-h} \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} I_n \text{ car } |\frac{\lambda_i}{\lambda_j}| < 1 \text{ pour } i > j.$$

On pose alors $D^h L D^{-h} = I_n + F_h$ où $F_h \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} 0$

$$\begin{aligned} \text{On peut alors réécrire } A^h &= Q R (D^h L D^{-h}) D^h U = Q R (I_n + F_h) D^h U \\ &= Q (I_n + R F_h R^{-1}) R D^h U. \end{aligned}$$

Et comme $F_h \rightarrow 0$, $\exists h_0 \in \mathbb{N}$, $I_n + R F_h R^{-1}$ soit inversible $\forall h \geq h_0$.

Ainsi, on a donc par unicité de la décomposition QR de $I_n + R F_h R^{-1} = \tilde{Q}_h \tilde{R}_h$ où $\tilde{R}_{i,i} > 0$. Les matrices $\tilde{Q}_h$ étant orthogonales, $\|\tilde{Q}_h\| = 1$ ($(\tilde{Q}_h)_h$ est bornée pour $\|\cdot\|_2$)

Donc par Bolzano-Weierstrass, on peut extraire une sous-suite convergente $(\tilde{Q}_{h'})_{h'}$ qui converge vers $\tilde{Q}$.

Comme $\tilde{R}_h = {}^t Q_h (I_n + R F_h R^{-1})$, la suite $(\tilde{R}_h)_h$ converge vers $\tilde{R}$ triangulaire, $\tilde{R}_{i,i} > 0$.
 Ainsi, par ①, en passant à la limite, $I_n = \tilde{Q} \tilde{R} \Rightarrow \tilde{R}_{i,i} > 0$ ($\det(I) = \det(\tilde{Q}) \det(\tilde{R}) = 1$ et $\det(\tilde{Q}) \neq 0$)
 et par unicité de la décomposition QR, $\tilde{Q} = \tilde{R} = I_n$.

Or notre suite (Q_h) évolue dans un compact (S^2) donc (Q_h) a une unique valeur d'adhérence $\Leftrightarrow Q_h \rightarrow Q$.

Alors en reprenant une sous-suite de (Q_h) convergente, on réitère le même raisonnement que précédemment et on retombe sur I_n comme VA.

Ainsi, l'unique valeur d'adhérence de $(\tilde{Q}_h)$ est I_n , et donc $\tilde{Q}_h \rightarrow I_n$ et $\tilde{R}_h \rightarrow I_n$.

On a donc : $A^h = \underbrace{(Q \tilde{Q}_h)}_{\text{unitaire}} \underbrace{(R_h R D^h U)}_{\text{triangle sup.}} = Q R_h$

Donc, $\forall h \in \mathbb{N}$, $\exists D_h$ diagonale, $|d_{i,i}| = 1$ et telle que $Q_h = Q \tilde{Q}_h D_h$.

On rappelle que $A_{h+2} = {}^t Q_h A Q_h = ({}^t \tilde{Q}_h {}^t Q_h {}^t Q) A (Q \tilde{Q}_h D_h)$, on a par $A = QRDLU = QRDR^{-2}Q^{-2}$

On en déduit $A_{h+2} = {}^t \tilde{Q}_h {}^t Q_h RDR^{-2} \tilde{Q}_h D_h$ et comme $\tilde{Q}_h \rightarrow I_n$, on a :

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} {}^t \tilde{Q}_h RDR^{-2} \tilde{Q}_h = RDR^{-2} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On pose alors $D_h = {}^t \tilde{Q}_h RDR^{-2} \tilde{Q}_h$, ainsi, $(A_{h+2})_{i,j} = (D_h)_{i,i} (D_h)_{j,j} (D_h)_{i,j}$ car D_h diagonale.

$$\text{De sorte que } (A_{h+2})_{i,i} = (D_h)_{i,i}^2 (D_h)_{i,i} = |(D_h)_{i,i}|^2 (D_h)_{i,i}$$

$$\text{D'où } A_h \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$